



Rapport de stage

Pour le diplôme d'ingénieur de l'Ecole des Ingénieurs de la Ville de Paris

Année 2025-2026

Modélisation des efforts aérodynamiques qui s'exercent sur les pales d'éoliennes

**Analyse numérique de la méthode Free Vortex Wake (FVW) et
Augmentation de fidélité par apprentissage statistique**

ROZENTALIS Adam

Promotion 65

Avril 2026 – Septembre 2026

Sous la direction de :

SALOMON Julien, Maître de stage

BADINIER Thibault, Tuteur EIVP

Notice bibliographique

AUTEUR du mémoire	
NOM	ROZENTALIS
Prénom	Adam
ORGANISME de stage	
NOM organisme	INRIA PARIS et LABORATOIRE JACQUES LOUIS LIONS
NOM, Prénom du maître de stage	SALOMON Julien
NOM, Prénom du tuteur EIVP	BADINIER Thibault
ANALYSE	
TITRE du mémoire	Modélisation des efforts aérodynamiques qui s'exercent sur les pales d'éoliennes
TITLE	Modeling of aerodynamic loads acting on wind turbine blades
RÉSUMÉ (15 à 20 lignes)	Ce stage de fin d'études, réalisé en partenariat entre l'INRIA et l'IFPEN, s'est articulé autour de deux objectifs distincts visant à améliorer la modélisation aérodynamique des éoliennes. Le premier a consisté à développer un réseau de neurones pour calculer les efforts aérodynamiques qui s'exercent sur les pales. Ce modèle a pour but d'atteindre la précision de la méthode de haute fidélité « Free Vortex Wake » (FVW) tout en conservant une complexité temporelle réduite, comparable à celle de la méthode de basse fidélité « Blade Element Momentum » (BEM). Plusieurs choix sur la nature du réseau de neurones, sur la variable cible, sur l'intégration de l'information BEM, sur la fonction de perte et sur le recours aux auto-encodeurs ont été testés et analysés. Le second objectif a été d'approfondir les travaux initiés au sein de la même équipe lors de mon précédent stage étude et recherche. Ce dernier portait sur l'analyse numérique de la méthode FVW afin de mieux comprendre ses mécanismes de convergence. Dans ce cadre, j'ai généralisé aux éoliennes tripales le formalisme mathématique de la méthode FVW que j'avais initialement conçu pour des rotors monopales. En particulier, pour l'algorithme de point fixe propre à la FVW, j'ai d'une part validé expérimentalement le critère de sélection de son facteur de relaxation, et, j'ai d'autre part implémenté et évalué une alternative à la méthode de Picard traditionnellement utilisée.
ABSTRACT	This end-of-studies internship, conducted in partnership between INRIA and IFPEN, focused on two distinct objectives aimed at improving the aerodynamic modeling of wind turbines. The first objective was to develop a neural network to calculate the aerodynamic forces acting on the blades. The goal of this model is to achieve the accuracy of the high-fidelity "Free Vortex Wake" (FVW) method while maintaining low temporal complexity, comparable to that of the low-fidelity "Blade Element Momentum" (BEM) method. Several choices regarding the nature of the neural network, the target variable, the integration of BEM information, the loss function, and the use of autoencoders were tested and analyzed. The second objective was to build upon the work initiated within the same team during my previous research internship. That internship focused on the numerical analysis of the FVW method to better understand its convergence mechanisms. In this context, I generalized the mathematical formalism of the FVW method—which I had initially designed for single-blade rotors—to three-blade wind turbines. In particular, for the fixed-point algorithm specific to the FVW method, I experimentally validated the selection criterion for its relaxation factor and implemented and evaluated an alternative to the traditionally used Picard method.

Mots-clés du thésaurus Archirès	Éolienne, mécanique des fluides numériques, aérodynamique, méthode du sillage tourbillonnaire libre, apprentissage automatique, apprentissage profond, analyse mathématiques, théorie de l'élément de pale		
Keyword thesaurus (anglais, 8 maxi)	Wind turbine, Computational Fluid Dynamics (CFD), aerodynamics, Free Vortex Wake method (FVW), machine learning, deep learning, mathematical analysis, Blade Element Momentum theory (BEM).		
Références			
	Nb de pages du mémoire	Annexes (nombre de p.)	Bibliogr. : nb de références
	55	68	24

Remerciements

Je tiens à exprimer en premier lieu ma profonde gratitude à mon tuteur de stage, Julien SALOMON, directeur de recherche à l'Inria Paris et au laboratoire Jacques Louis Lions de Sorbonne Université, responsable de l'équipe projet ANGE. Sa disponibilité, sa pédagogie et sa bienveillance constante m'accompagnent depuis deux ans maintenant. Il m'a fait confiance en me confiant un sujet exigeant et il m'a offert une véritable initiation au métier de chercheur. J'ai pu acquérir grâce à lui de solides compétences en aérodynamique, en analyse numérique et en mathématiques appliquées.

J'adresse mes sincères remerciements à Wagner GONÇALVES DA SILVA PINTO, ingénieur de recherche à l'IFPEN, pour nous avoir partagé son expertise. Nos nombreux échanges, en présentiel comme par visioconférence ont été déterminants dans l'avancée de ce travail. Je remercie également Nicolas GUY, chef de projet à l'IFPEN, pour son accueil, pour le suivi régulier qu'il a assuré et pour le regard critique qu'il a porté sur nos résultats.

Je souhaite mentionner Caroline LE GUERN, que je n'ai pas eu l'occasion de rencontrer puisqu'elle a quitté l'IFPEN quelques jours avant mon arrivée. Le solveur SVEN, qu'elle a développé au cours de sa thèse de doctorat, constitue pourtant l'outil central de ce stage : une part importante de ce rapport n'aurait pas vu le jour sans son travail.

Je remercie chaleureusement Arthur TIMBEAU, mon collègue de stage, étudiant en Master 2 à l'ENSTA et à l'Université Paris Saclay. Après une première rencontre l'année dernière, travailler avec lui en binôme sur l'un des deux objectifs de ce stage a été un vrai plaisir : nos discussions, techniques comme moins techniques, ont nourri ce travail bien au-delà de ce que j'aurais pu produire seul.

Enfin, je tiens à remercier mon tuteur école Thibault BADINIER pour les précieux échanges que nous avons eus.

Sommaire

Remerciements	1
Table des figures	6
Liste des tableaux	7
Liste des abréviations	8
Glossaire	10
Introduction	16
1 Contexte du stage	19
1.1 Présentation de l'équipe et de l'organisme d'accueil	19
1.2 Présentation des missions et de l'organisation du stage	21
2 Objectif A : Augmentation de fidélité par apprentissage statistique	24
2.1 Méthodologie	24
2.1.1 Variables du problème	24
2.1.2 Réduction du problème	25
2.1.3 Le choix de la variable cible	26
2.1.4 Génération des données	28
2.1.5 Les axes de conception explorés	28
2.1.6 Fonction de perte et métriques d'évaluation	29
2.1.7 Méthodologie d'élague : la compétition des modèles	30
2.2 Résultats	31
2.2.1 Performance d'ensemble	31
2.2.2 Résultats des épreuves	32
2.2.3 Distribution spatiale de l'erreur	33
2.2.4 Grandeurs intégrées et généralisation	35
2.3 Bilan et travail futur	36
2.3.1 Bilan	36
2.3.2 Travaux en cours	37
2.3.3 Perspectives et valorisation	37
3 Objectif B : Analyse numérique de la méthode Free Vortex Wake (FVW)	39
3.1 Méthodologie	39
3.1.1 Position du problème	39
3.1.2 Généralisation du formalisme à une éolienne multi-pales	40

3.1.3	Les leviers théoriques mobilisés	40
3.1.4	Mise en œuvre et protocole expérimental	42
3.2	Résultats	43
3.2.1	Cas d'étude	43
3.2.2	Expérience n°1 : validation du formalisme et analyse de la convergence	43
3.2.3	Expérience n°2 : coût de la résolution	46
3.3	Bilan et travail futur	49
4	Retour d'expérience	50
4.1	Difficultés rencontrées	50
4.2	Apports personnels et professionnels	51
5	Conclusion	52
	Références	54
	Annexes	56
I	Description de la méthode FVW	56
I.1	Les lois de l'aérodynamique	56
I.2	Algorithme Numérique	60
I.2.1	Algorithme du point fixe	61
I.2.2	Calcul de la vitesse induite (Biot–Savart)	62
I.2.3	Schéma d'advection	62
I.2.4	Mise à jour des circulations du sillage (Kelvin)	63
I.3	Formalisme Mathématique	63
I.3.1	Formalisme général	63
I.3.2	Formalisme de l'algorithme du point fixe	66
I.3.3	Formalisme de l'advection dans l'algorithme principal	67
II	Résultats théoriques concernant l'algorithme du point fixe de la méthode FVW	69
II.1	Jacobienne	69
II.2	Constante de Lipschitz	73
II.3	Résolution par la méthode de Newton	74
II.4	Retour à la Relaxation	75
II.5	Interprétation physique de la Jacobienne analytique	77
II.6	Complexité théorique	77
II.6.1	Coût de l'algorithme principal (Advection)	77
II.6.2	Coût du solveur de point fixe	78
II.6.3	Synthèse et comparaison	78

III Description de la méthode BEM	79
III.1 Introduction au modèle BEM	79
III.1.1 Historique du modèle	79
III.1.2 Présentation formelle du modèle	79
III.2 Mise en place de la BEM	86
III.2.1 Correction de Prandtl	86
III.2.2 Angle de déviation du sillage et angle de yaw	90
III.2.3 Correction de Buhl	93
III.2.4 Algorithme de Ning non couplé	94
IV Présentation de l'éolienne New Mexico	97
IV.1 Une éolienne d'intérieur	97
IV.2 Distribution des rayons, lignes de cordes et des angles de vrillages	98
IV.3 Graphiques des profils et des polaires	99
IV.4 Comparaison graphique entre les différents solveurs et les données expérimentales	100
V Formalisation et architecture des modèles prédictifs	101
V.1 Formulation du problème : variables, adimensionnement et intégration de la BEM	101
V.1.1 Grandeurs physiques et adimensionnement	101
V.1.2 Topologies d'entrée-sortie : stratégies GV et GM	102
V.1.3 Modes d'intégration de la BEM (0, 1, 2, 2+)	103
V.2 Architectures des réseaux	104
V.2.1 Réseaux prédictifs : <code>TurbineMLP</code> et <code>TurbineCNN</code>	104
V.2.2 Banque d'auto-encodeurs pré-entraînés	105
V.2.3 Sélection conjointe de l'auto-encodeur et du réseau prédictif	108
V.3 Chaîne physique différentiable et fonction de perte	108
V.3.1 Chaîne physique aval : conversion $\mathcal{C}_{v \rightarrow f}$ et intégration de C_P , C_T	108
V.3.2 Fonction de perte unifiée (<code>TurbineLoss</code>)	110
V.4 Nomenclature et protocole d'apprentissage	112
V.4.1 Convention de nommage des modèles	112
V.4.2 Variantes de calcul de la BEM	113
V.4.3 Protocole sur la proportion de données (suffixe PX)	113
V.4.4 Plages de recherche des hyperparamètres et paramètres fixes	113
V.5 Métriques d'évaluation	114
V.5.1 Les dix sous-métriques	114
V.5.2 Statistiques de dispersion : écart-type et maximum de l'erreur	116
V.5.3 Scores composites de sélection et critère de sauvegarde	117

VI Résultats détaillés des modèles prédictifs	118
VI.1 Tableaux récapitulatifs	118
VI.2 Cartes polaires complémentaires	121
VII Guide des dépôts Github	122
VII.1 Organisation des dépôts	122
VII.2 Correspondance entre le formalisme mathématique et le code SVEN	122

Table des figures

1	Force tangentielle en fonction du temps	26
2	Force tangentielle en fonction de l'azimut	27
3	Erreur absolue sur F_n : BEM contre modèle de branche A	34
4	Erreur relative sur F_n : BEM contre modèle de branche B	34
5	Erreur relative sur C_P dans le plan (γ, TSR)	35
6	Polaires de New Mexico et leurs dérivées	43
7	Rayons spectraux de la jacobienne et des matrices de majoration	45
8	Constantes de Lipschitz empiriques et rayons spectraux	45
9	Valeurs propres de la jacobienne au point fixe	47
10	Résidus au premier pas de temps	48
11	Résidus au dernier pas de temps	48
12	Nombre d'itérations et temps d'exécution du solveur de point fixe	49
13	Réduction d'une vorticité 3D �� une circulation 1D	56
14	Représentation schématique d'un sillage et notations pour la formule de Biot-Savart	57
15	Géométrie d'une section de pale	58
16	Représentation de la force de portance $\vec{L}$	59
17	Schéma des vortex liés et des vortex libres	60
18	Représentation schématique d'un sillage produit par la première pale et exemple d'un triangle trailing	65
19	Modélisation 3D et 2D du sillage	87
20	Transformation de Joukowski	88
21	Calcul de la distance s	89
22	Angles de yaw γ et de sillage χ	91
23	C_T face aux données empiriques	93
24	Régimes de la méthode de Ning	94
25	Distribution des rayons, cordes et vrillages	98
26	Profils de DU91, NACA64 et RISOE	99
27	Polaires associées à chaque profil	99
29	Photo de l'éolienne New Mexico	100
28	Solveurs contre données expérimentales	100
30	Architecture générique des modes 0, 1 et 2 avec Auto-Encodeurs.	104
31	Architecture du mode 2+	104
32	Architecture du <code>TurbineMLP</code>	105
33	Architecture du <code>TurbineCNN</code>	106
34	<code>ConvolutionalAutoencoder</code> (type M)	108
35	Architecture de la <code>TurbineLoss</code> unifiée.	112

36	Erreur relative sur F_t : BEM contre modèle d'option A	121
37	Erreur relative sur F_t : BEM contre modèle d'option B	121

Liste des tableaux

1	Axes de conception des modèles prédictifs	29
2	Les six épreuves de la compétition	31
3	Synthèse des vainqueurs de la compétition	32
4	Articulation entre résultats théoriques et expériences numériques	42
5	Plages de recherche Optuna du modèle prédictif	114
6	Plages de recherche Optuna du pré-entraînement des auto-encodeurs	114
7	Performances des modèles testés pour le score A	119
8	Performances des modèles testés pour le score B	120

Liste des abréviations

AE	Auto-encodeur (<i>autoencoder</i>).
ANGE	Analyse Numérique, Géophysique et Environnement : équipe-projet commune à l’Inria, au CNRS et à Sorbonne Université.
ANR	Agence Nationale de la Recherche.
BEM	<i>Blade Element Momentum</i> : méthode aérodynamique fondée sur la théorie de l’élément de pale et la théorie de la quantité de mouvement.
BEMOL	<i>Blade Element Momentum Open-source Library</i> : bibliothèque open source dédiée aux calculs BEM.
BET	<i>Blade Element Theory</i> : théorie de l’élément de pale.
BN	<i>Batch Normalization</i> : normalisation par lots.
CASTOR	Solveur vortex de l’IFPEN : « Code Aérodynamique pour la Simulation de Turbines OffshoRe ».
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> : mécanique des fluides numérique.
CFM	Congrès Français de Mécanique.
CNN	<i>Convolutional Neural Network</i> : réseau de neurones convolutif.
CNRS	Centre National de la Recherche Scientifique.
CUDA	<i>Compute Unified Device Architecture</i> : interface de programmation de NVIDIA pour le calcul sur processeurs graphiques.
DLC	<i>Design Load Cases</i> : cas de charge utilisés pour le dimensionnement.
EIVP	École des Ingénieurs de la Ville de Paris.
ENSTA	École Nationale Supérieure de Techniques Avancées.
ERRABL	Projet du PEPR Maths-Vives consacré à l’estimation de la ressource dans le Raz Blanchard.
FVW	<i>Free Vortex Wake</i> : méthode de sillage tourbillonnaire libre.
GPU	<i>Graphics Processing Unit</i> : processeur graphique.
HyFloEFlu	Projet ANR consacré aux hydroliennes flottantes.
IA	Intelligence Artificielle.
IEA	<i>International Energy Agency</i> : Agence Internationale de l’Énergie.
IFP	Variante de correction du yaw développée à l’IFPEN.
IFPEN	IFP Énergies nouvelles.
Inria	Institut National de Recherche en sciences et technologies du Numérique.
LHS	<i>Latin Hypercube Sampling</i> : plan d’expériences par hypercube latin.
LJLL	Laboratoire Jacques-Louis Lions.

LSR	<i>Local Speed Ratio</i> : vitesse spécifique locale.
LU	Décomposition <i>Lower–Upper</i> d’une matrice.
Mexico	<i>Model EXperiments In Controlled Conditions</i> : campagne expérimentale.
MLP	<i>Multi-Layer Perceptron</i> : perceptron multicouche.
MSE	<i>Mean Squared Error</i> : erreur quadratique moyenne.
MT	<i>Momentum Theory</i> : théorie de la quantité de mouvement.
MW	Mégawatt.
NACA	<i>National Advisory Committee for Aeronautics</i> : famille de profils aérodynamiques.
P&P	Modèle de correction d’ <i>inflow</i> dynamique de Pitt & Peters.
PEPR	Programme et Équipement Prioritaire de Recherche.
RMSE	<i>(Root) Mean Square Error</i> : (racine de l’)erreur quadratique moyenne.
SVEN	Solveur Vortex ÉolienNes : solveur FVW de l’IFPEN.
TORQUE	<i>The Science of Making Torque from Wind</i> : conférence internationale sur l’éolien.
TSR	<i>Tip Speed Ratio</i> : vitesse spécifique en bout de pale.
WESC	<i>Wind Energy Science Conference</i> .

Glossaire

Les termes ci-dessous sont ceux employés dans le corps du rapport et dans les annexes. Ils sont classés en deux catégories : ceux qui relèvent de l'aérodynamique et ceux qui relèvent de l'apprentissage statistique.

Aérodynamique et méthodes numériques

Advection. Transport d'une quantité par un champ de vitesse. Dans une description lagrangienne, elle correspond au déplacement des particules ou marqueurs avec l'écoulement.

Aérodynamique. Branche de la mécanique des fluides qui étudie l'écoulement de l'air autour des corps et les efforts qui en résultent.

Aéroélasticité. Couplage entre les efforts aérodynamiques et la déformation élastique d'une structure.

Angle d'attaque (α). Angle formé entre la corde d'un profil et la direction de la vitesse relative de l'écoulement.

Angle de déviation relatif (φ). Angle décrivant l'orientation de la vitesse relative de l'écoulement par rapport au plan de rotation de la pale.

Angle de sillage (χ). Angle décrivant la déviation du sillage lorsque le vent incident n'est pas aligné avec l'axe du rotor.

Angle de twist (angle de vrillage). Angle d'inclinaison d'une section de pale autour de son axe longitudinal. Il peut varier le long de l'envergure de la pale.

Azimut (θ). Position angulaire d'une pale dans le plan de rotation du rotor.

Baseline (référence). Méthode ou modèle de référence servant de point de comparaison pour évaluer les performances d'une autre méthode.

Betz–Joukowski (limite de). Limite théorique du rendement maximal d'une turbine idéale extractrice d'énergie d'un écoulement.

Biot–Savart (loi de). Relation donnant la vitesse induite par une distribution de courants ou de filaments tourbillonnaires.

Blade nodes (nœuds de pale). Points utilisés pour discrétiser géométriquement une pale.

Bound filament (filament lié). Segment tourbillonnaire attaché à la pale et portant une circulation.

Buhl (correction de). Correction empirique de la relation entre le coefficient de poussée

et le facteur d'induction axiale dans certains régimes de fonctionnement.

Circulation (Γ). Intégrale curviligne de la vitesse autour d'un contour fermé. Elle constitue une grandeur fondamentale de la théorie des écoulements tourbillonnaires.

Coefficient de poussée (C_T). Grandeur adimensionnelle caractérisant la poussée exercée sur un rotor.

Coefficient de puissance (C_P). Rapport entre la puissance extraite par le rotor et la puissance disponible dans l'écoulement incident.

Coefficient de traînée (C_D). Coefficient adimensionnel caractérisant la force de traînée d'un profil ou d'un corps.

Control point (point de contrôle, point de Kutta). Point de calcul associé à une section de la ligne portante, utilisé pour déterminer les grandeurs aérodynamiques locales.

Corde (c). Distance entre le bord d'attaque et le bord de fuite d'une section de pale.

Décrochage. Régime aérodynamique apparaissant lorsque l'angle d'attaque dépasse une valeur critique et que la portance diminue fortement.

Design Load Cases (cas de charge normalisés). Scénarios de vent et de fonctionnement définis pour évaluer les charges auxquelles une éolienne peut être soumise.

Edge nodes (nœuds de bord de fuite). Points situés sur le bord de fuite d'une pale et associés à l'émission de filaments dans le sillage.

Envergure. Longueur d'une pale mesurée du moyeu à son extrémité.

Facteur d'induction axiale (a). Mesure de la diminution de la vitesse axiale de l'écoulement au passage du rotor.

Facteur d'induction tangentielle (a'). Mesure de la composante de rotation induite dans l'écoulement par le rotor.

Facteur de relaxation (η_{relax}). Coefficient utilisé pour amortir les mises à jour successives d'une méthode itérative et favoriser sa convergence.

Filament tourbillonnaire. Segment portant une circulation et utilisé pour représenter une structure tourbillonnaire dans une méthode de calcul.

Fluide parfait. Fluide idéal dont la viscosité est négligée.

Free Vortex Wake (sillage tourbillonnaire libre). Méthode aérodynamique représentant explicitement le sillage par des filaments tourbillonnaires libres dont la position évolue avec l'écoulement.

Freestream (écoulement incident). Écoulement non perturbé situé suffisamment en amont du rotor.

Hub/tip loss (pertes en pied et en bout de pale). Correction permettant de repré-

senter la diminution de circulation près du moyeu et de l'extrémité des pales.

Kelvin (théorème de). Théorème de conservation de la circulation dans certaines conditions d'écoulement.

Kutta-Joukowski (théorème de). Relation reliant la portance d'un profil à sa circulation et à sa vitesse relative.

Lagrangien (marqueur). Point matériel ou marqueur suivi au cours de son déplacement avec l'écoulement.

Leading edge (bord d'attaque). Bord avant d'un profil aérodynamique, rencontré en premier par l'écoulement.

Lift coefficient (coefficient de portance, C_L). Coefficient adimensionnel caractérisant la portance d'un profil.

Lift force (force de portance). Composante de la force aérodynamique perpendiculaire à l'écoulement relatif.

Lifting-line (ligne portante). Représentation simplifiée d'une pale par une ligne portant la circulation aérodynamique.

Ligne de courant. Courbe dont la tangente est en tout point parallèle au vecteur vitesse de l'écoulement.

Moyeu (hub). Partie centrale du rotor sur laquelle sont fixées les pales.

Ning (algorithme de). Méthode de résolution de la BEM formulée comme un problème de recherche du zéro d'une fonction résiduelle.

Pitch. Angle d'orientation d'une pale autour de son axe longitudinal.

Plan du profil (Π). Plan local associé à une section de pale et utilisé pour décrire la vitesse relative et les efforts aérodynamiques.

Polaire (table polaire). Table donnant les coefficients aérodynamiques d'un profil en fonction notamment de l'angle d'attaque.

Prandtl (correction de). Correction permettant de tenir compte des pertes aérodynamiques associées aux extrémités des pales.

Pression dynamique. Grandeur proportionnelle au carré de la vitesse et utilisée notamment pour adimensionner les forces aérodynamiques.

Principe de Bernoulli. Relation exprimant la conservation de l'énergie mécanique d'un écoulement dans certaines conditions, notamment le long d'une ligne de courant.

Profil aérodynamique. Section transversale d'une pale dont la géométrie détermine notamment ses caractéristiques aérodynamiques.

Régime permanent (établi). Régime dans lequel les grandeurs étudiées ne présentent

plus d'évolution temporelle autre que celle liée à la périodicité éventuelle du mouvement.

Reynolds (nombre de). Nombre adimensionnel caractérisant le rapport entre les effets inertiels et visqueux dans un écoulement.

Rotor. Ensemble constitué du moyeu et des pales.

Shed filament (filament détaché). Filament tourbillonnaire associé à une variation temporelle de la circulation liée.

Sillage (wake). Région d'écoulement perturbé située en aval d'un corps ou d'un rotor.

Soufflerie. Installation expérimentale permettant de soumettre une maquette à un écoulement contrôlé.

Tip Speed Ratio (vitesse spécifique). Rapport entre la vitesse périphérique en bout de pale et la vitesse de l'écoulement incident.

Trailing edge (bord de fuite). Bord arrière d'un profil aérodynamique.

Trailing filament (filament traînant). Filament tourbillonnaire associé à une variation spatiale de la circulation le long d'une pale.

Turbulent Windmill State. Régime de fonctionnement d'une turbine dans lequel les relations classiques de la théorie de la quantité de mouvement peuvent nécessiter des corrections.

Vitesse apparente (V_{app}). Norme de la vitesse relative vue par une section de pale en mouvement.

Vitesse induite ($\vec{u}_{ind}$). Contribution au champ de vitesse produite par les structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement.

Vorticité ($\vec{\omega}$). Rotationnel du champ de vitesse, caractérisant localement la tendance de l'écoulement à tourner.

Wake nodes (nœuds du sillage). Marqueurs lagrangiens associés aux extrémités des filaments libres du sillage.

Yaw (lacet). Angle de désalignement entre la direction du vent incident et l'axe du rotor.

Apprentissage statistique et *deep learning*

Apprentissage supervisé. Cadre d'apprentissage dans lequel un modèle apprend une relation entre des données d'entrée et des valeurs cibles connues.

Auto-encodeur (*autoencoder*). Réseau composé d'un encodeur et d'un décodeur permettant de représenter une donnée dans un espace latent de dimension réduite avant de la reconstruire.

Batch normalization (BN). Technique consistant à normaliser les activations d'un

réseau à partir des statistiques d'un lot d'exemples.

Bootstrap. Méthode de rééchantillonnage avec remise utilisée notamment pour estimer l'incertitude d'une statistique.

Convolution. Opération appliquant un noyau local à une donnée structurée afin d'en extraire des caractéristiques.

Couche (*layer*). Élément constitutif d'un réseau de neurones réalisant une transformation des données.

Cross-validation (validation croisée). Méthode d'évaluation consistant à partitionner les données en plusieurs sous-ensembles utilisés successivement pour l'apprentissage et la validation.

Deep learning (apprentissage profond). Famille de méthodes d'apprentissage automatique reposant sur des réseaux de neurones comportant plusieurs couches.

Dropout. Technique de régularisation consistant à désactiver aléatoirement une partie des neurones pendant l'entraînement.

Encodeur / décodeur. Parties respectivement chargées de projeter une donnée vers un espace latent et de reconstruire la donnée à partir de cette représentation.

Ensemble de test. Ensemble de données réservé à l'évaluation finale d'un modèle et non utilisé pour son apprentissage.

Époque. Passage complet de l'algorithme d'apprentissage sur l'ensemble des données d'entraînement.

Espace latent. Espace de représentation de dimension réduite dans lequel un auto-encodeur encode les données.

Fold. Sous-ensemble de données utilisé dans une étape de validation croisée.

Fonction d'activation. Fonction non linéaire appliquée aux sorties d'une couche d'un réseau de neurones.

Graine aléatoire. Valeur initialisant un générateur pseudo-aléatoire afin de rendre une procédure reproductible.

Hyperparamètre. Paramètre d'un modèle ou de son apprentissage qui n'est pas directement appris par optimisation des poids du réseau.

Inférence. Utilisation d'un modèle entraîné pour produire une prédiction à partir d'une nouvelle donnée d'entrée.

Learning rate (taux d'apprentissage). Paramètre contrôlant l'amplitude des mises à jour effectuées lors de l'optimisation des poids.

Loss (fonction de perte). Fonction scalaire mesurant l'écart entre les prédictions d'un

modèle et les valeurs cibles et servant de critère d'optimisation.

Méta-modèle (modèle de substitution, *surrogate*). Modèle appris à partir des sorties d'un modèle ou solveur de référence afin d'en reproduire les résultats à un coût de calcul inférieur.

Optuna. Bibliothèque Python destinée à l'optimisation des hyperparamètres.

Padding. Ajout de valeurs autour d'une donnée avant une opération de convolution, notamment pour contrôler les dimensions de la sortie.

Perceptron multicouche (MLP). Réseau de neurones constitué de plusieurs couches entièrement connectées.

Pooling. Opération de réduction de la résolution d'une représentation, généralement utilisée dans les réseaux convolutifs.

Pruning (élagage). Procédure consistant à interrompre ou supprimer des configurations jugées peu prometteuses lors d'une optimisation.

PyTorch. Bibliothèque Python dédiée au calcul tensoriel et à l'apprentissage automatique.

Réseau de neurones. Modèle paramétrique constitué de couches de transformations et de fonctions non linéaires dont les paramètres sont appris à partir de données.

Résiduel (apprentissage). Stratégie consistant à apprendre l'écart entre une prédiction de référence et la grandeur cible plutôt que la grandeur cible directement.

Rétro-propagation. Algorithme permettant de calculer efficacement les gradients d'une fonction de perte par rapport aux paramètres d'un réseau de neurones.

RMSE. Racine de l'erreur quadratique moyenne, utilisée pour mesurer l'écart entre des valeurs prédites et des valeurs de référence.

Scaler (standardisation). Transformation appliquée aux variables afin de les mettre sur une échelle comparable, par exemple par centrage et réduction.

Stride. Pas de déplacement du noyau lors d'une opération de convolution.

Surapprentissage. Situation dans laquelle un modèle s'adapte excessivement aux données d'entraînement et généralise moins bien sur de nouvelles données.

Variable cible. Grandeur que le modèle cherche à prédire à partir des données d'entrée.

Vérité terrain. Valeur de référence utilisée pour évaluer les prédictions d'un modèle.

Introduction

Le réchauffement climatique est une réalité établie : l'accumulation dans l'atmosphère des gaz à effet de serre, issus pour l'essentiel de la combustion des énergies fossiles, modifie durablement le climat et impose une transition rapide vers des sources d'énergie décarbonées. Parmi celles-ci, l'énergie éolienne occupe une place prometteuse en étant compétitive économiquement et déployable aussi bien à terre qu'en mer. Elle constitue aujourd'hui l'un des piliers de la transition énergétique dans de nombreux pays, notamment la France.

Produire de l'électricité avec le vent demande plusieurs étapes. Le rotor récupère l'énergie du vent et la transforme en énergie mécanique. Cette énergie est ensuite transmise à une génératrice, qui produit de l'électricité. Comme cette électricité peut avoir une fréquence variable, elle est adaptée par un système électronique avant d'être envoyée sur le réseau électrique. Chacun de ces maillons répond à des contraintes qui lui sont propres, mais c'est en amont, au niveau du rotor, que se concentrent l'essentiel des efforts mécaniques subis par la structure, et donc l'essentiel des enjeux de conception.

Simuler numériquement une éolienne suppose en effet de représenter correctement l'interaction de plusieurs physiques : l'aérodynamique, qui détermine les efforts exercés par le vent sur les pales ; la dynamique des structures, qui gouverne la réponse mécanique de la tourelle, du rotor et des pales à ces efforts ; les systèmes de contrôle, qui pilotent en temps réel le pitch des pales et le couple électromagnétique pour réguler la puissance produite ; et, pour les éoliennes en mer, l'hydrodynamique, qui ajoute les efforts de houle et de courant sur la structure porteuse. Des outils commerciaux tels que *DeepLines Wind* [Principia and IFP Energies nouvelles,], auquel l'IFPEN est notamment partenaire, couplent ces quatre physiques au sein d'une même simulation aéro-hydro-servo-élastique.

Ce travail de fin d'études se restreint volontairement à l'un de ces quatre volets : l'aérodynamique, c'est-à-dire le calcul des efforts exercés par le vent sur les pales du rotor. Deux grandes familles de méthodes numériques permettent ce calcul, décrites en détail dans les annexes III et I. La méthode Blade Element Momentum (BEM) est la méthode historique et reste aujourd'hui la plus utilisée en pratique. Elle repose sur des bilans simplifiés de la quantité de mouvement et divise la pale en plusieurs sections considérées comme indépendantes. Son principal avantage est son faible coût de calcul, ce qui en fait une méthode largement utilisée dans l'industrie. Cependant, elle repose sur des hypothèses simplificatrices qui limitent sa précision lorsque les effets du sillage du rotor deviennent importants. La méthode Free Vortex Wake (FVW), plus récente, permet d'obtenir des résultats plus précis en représentant directement le sillage tourbillonnaire créé par les pales

et son évolution au cours du temps.

La modélisation aérodynamique des éoliennes répond à des besoins concrets. En phase de conception, elle permet d’optimiser la géométrie des pales et de vérifier, avant toute construction, que l’éolienne résistera aux efforts qu’elle rencontrera dans des scénarios de charge normalisés, les *Design Load Cases* (DLC). Elle permet également de vérifier que le rendement et la production annuelle d’énergie annoncés par le constructeur seront effectivement atteints et, à l’aide de méthodologies dédiées, d’estimer la durée de vie de la structure par des calculs de fatigue. Une fois l’éolienne en exploitation, ces mêmes outils de simulation trouvent un usage complémentaire : ils permettent d’anticiper des opérations de maintenance ou de s’adapter à des situations exceptionnelles sur un horizon de plusieurs heures à plusieurs jours, là où les systèmes de contrôle embarqués, eux, adaptent en continu et en quelques secondes le comportement de l’éolienne aux conditions de vent usuelles.

L’importance de ces outils de simulation, et donc d’aide à la décision, se mesure aussi à l’aune des accidents survenus sur des éoliennes en exploitation, lorsque les efforts réellement subis se sont révélés supérieurs à ceux pour lesquels la machine avait été conçue, ou lorsque ses systèmes de sécurité n’ont pas su les anticiper. L’un des cas les plus connus, notamment parce qu’il a été filmé par un témoin, est l’emballement puis la rupture spectaculaire du rotor d’une éolienne du parc de Hornslet, au Danemark, le 22 février 2008¹. De tels événements, bien que rares, rappellent qu’une éolienne mal dimensionnée, ou dont le comportement s’écarte de ce qu’anticipent les modèles employés pour la concevoir, expose à des conséquences potentiellement graves.

Ces dernières années, l’intelligence artificielle s’est imposée dans la quasi-totalité des domaines scientifiques et industriels. Une tendance particulièrement active consiste à déployer des méta-modèles, ou modèles de substitution, appris sur les résultats de simulations haute fidélité coûteuses, pour en reproduire la précision à un coût de calcul très inférieur. L’aérodynamique des éoliennes se prête à cet exercice, et c’est précisément l’un des deux axes de ce stage.

L’autre axe prolonge un travail antérieur sur la méthode FVW. Mon stage étude et recherche de l’année précédente avait posé un premier cadre d’analyse numérique de cette méthode, mais dans une configuration restreinte, et avait laissé ouvertes plusieurs pistes, détaillées dans la Section 1. Ce sont ces deux constats, l’un sur le coût de la méthode FVW, l’autre sur les limites de l’analyse conduite l’année précédente, qui structurent les deux objectifs de ce travail de fin d’études :

1. Les circonstances précises de cet accident sont peu documentées.

- l'**objectif A** vise à développer un modèle de réseau de neurones capable de reproduire la précision de la méthode FVW, haute fidélité, pour un coût de calcul comparable à celui de la méthode BEM, basse fidélité ;
- l'**objectif B** vise à mener à leur terme les perspectives laissées ouvertes l'année précédente sur le nouveau formalisme mathématique de la méthode FVW : généralisation à des éoliennes multi-pales, établissement d'un critère de choix du facteur de relaxation, et évaluation de l'apport de la méthode de Newton par rapport à la méthode de Picard relaxée pour la résolution de l'algorithme de point fixe spécifique à cette méthode.

Le présent rapport s'organise en quatre parties. La Section 1 précise le contexte du stage : les organismes d'accueil, l'encadrement, les travaux antérieurs dont ce stage prend la suite, et les ressources mises à disposition. La Section 2 et la Section 3 présentent respectivement la méthodologie suivie et les résultats obtenus pour l'objectif A et pour l'objectif B. La Section 4, enfin, propose une analyse plus personnelle du déroulé du stage, des difficultés rencontrées et de ce qu'il m'a apporté.

1 Contexte du stage

1.1 Présentation de l'équipe et de l'organisme d'accueil

Ce travail de fin d'études s'est déroulé au sein de l'équipe-projet ANGE, commune à l'Inria, au CNRS et à Sorbonne Université, en collaboration étroite avec l'IFP Énergies nouvelles (IFPEN). L'équipe ANGE, pour Analyse Numérique, Géophysique et Environnement, exerce au sein du laboratoire Jacques-Louis Lions qui est l'un des principaux laboratoires français de mathématiques appliquées. Cette double appartenance recouvre exactement la nature du travail mené, associant l'analyse mathématique d'une méthode numérique sur le plan académique à son emploi dans des codes de calcul destinés à l'ingénierie sur le plan industriel.

L'équipe ANGE réunit une vingtaine de personnes et elle est dirigée depuis 2020 par Julien Salomon, qui est mon tuteur de stage. Ses travaux portent sur le contrôle optimal, la parallélisation en temps, le transport optimal, la réduction de modèle et l'assimilation de données. Il intervient sur les questions mathématiques du projet, entre autres sur l'analyse des méthodes BEM et FVW ainsi que sur les techniques d'accélération numérique.

L'équipe ANGE conçoit des modèles mathématiques et des schémas numériques avancés pour la simulation des écoulements géophysiques. Même si ces travaux sont dédiés à l'étude de phénomènes naturels, on constate que certaines des problématiques abordées ont des applications dans le domaine du génie urbain et de l'aménagement du territoire. L'équipe s'intéresse par exemple aux risques hydrologiques, à travers la simulation des crues et des inondations, en prenant en compte des phénomènes tels que la présence de débris ou encore la transition entre les écoulements à surface libre et les écoulements en charge dans les réseaux d'assainissement, avec par exemple [Godlewski et al., 2018]. Ses travaux portent également sur la modélisation de phénomènes tels que les tsunamis ou encore les glissements de terrain, voir par exemple [Allgeyer et al., 2019] ainsi que [Audusse et al., 2012]. En effet, prévoir l'évolution des littoraux est primordial pour préserver la pérennité des ouvrages hydrauliques et d'art comme les ponts et les canaux. L'équipe ANGE a déjà travaillé sur l'environnement urbain en modélisant la pollution de l'air et du bruit en ville, voir notamment [Hammond et al., 2020] et [Lesieur et al., 2020]. De plus, elle s'est impliquée dans les énergies durables par l'optimisation des dispositifs d'énergies marines renouvelables et de la production de biocarburants par micro-algues, avec par exemple [Bernard et al., 2025].

Ce stage fait le lien entre deux axes de recherche développés au sein de l'équipe. Le premier concerne les énergies renouvelables, domaine de recherche important depuis plu-

sieurs années pour l'équipe ANGE. Julien Salomon a notamment piloté le projet ANR HyFloEFlu, sur l'étude des hydroliennes flottantes. En septembre 2025, l'équipe s'est vue confiée le projet ERRABL du PEPR Maths-Vives, visant à estimer la ressource hydrolienne dans le Raz Blanchard.

Quant à notre collaborateur, l'IFP Énergies nouvelles, anciennement Institut français du pétrole, il s'agit d'un établissement public de recherche, d'innovation et de formation placé sous la tutelle du ministère chargé de l'énergie. Il a élargi ses missions en 2010 suite à la loi Grenelle II. Aujourd'hui, il intervient principalement sur la mobilité durable, les énergies nouvelles et la gestion responsable des ressources en hydrocarbures. L'éolien constitue également l'un de ses axes de recherche, notamment au sein des équipes de Rueil-Malmaison, qui développent des outils de simulation aéro-hydro-servo-élastique appliqués aux éoliennes terrestres et offshore. L'IFPEN est notamment partenaire du logiciel commercial DeepLines Wind et a développé le solveur vortex CASTOR pour la Simulation de Turbines OffshoRe. Ses travaux récents portent en particulier sur la réduction du coût des méthodes de sillage tourbillonnaire libre par accélération sur processeurs graphiques [Blondel et al., 2024], condition sans laquelle ces méthodes resteraient hors de portée d'un usage en conception.

L'équipe encadrant le stage est complétée par trois collaborateurs de l'IFPEN. Wagner Gonçalves Pinto est ingénieur de recherche spécialisé en mécanique des fluides numérique et aéroacoustique. Il est notre principal interlocuteur pour les aspects aérodynamiques et numériques. Il développe et maintient notamment les modules BEM et vortex. Quant à Nicolas Guy, il est chef de projet à l'IFPEN et spécialiste de la mécanique et des matériaux. Il nous apporte principalement son point de vue sur les cas d'applications et assure le suivi du projet côté IFPEN. Enfin, Caroline Le Guern, ingénieure en aérodynamique, est à l'origine du solveur SVEN que nous utilisons dans le cadre du stage. Ses travaux portent notamment sur la modélisation de l'aéroélasticité des grandes éoliennes [Le Guern, 2024], bien qu'elle ait rejoint Airbus à Toulouse peu avant le début du stage et n'ait donc pas participé directement à son déroulement.

La collaboration avec l'IFPEN s'appuie sur des réunions de travail en présentiel organisées toutes les trois semaines à Rueil-Malmaison. Ces rencontres permettent de suivre l'avancement des travaux et d'échanger sur les résultats obtenus. Entre ces réunions, les échanges se poursuivent régulièrement par courriel ou visioconférences avec Wagner concernant l'implémentation de SVEN et l'analyse des résultats numériques. Les travaux menés avec Julien Salomon et Arthur Timbeau se déroulent quant à eux principalement au sein du LJLL.

1.2 Présentation des missions et de l'organisation du stage

Ce stage prolonge deux travaux menés en parallèle l'année précédente, tous deux encadrés par Julien Salomon et conduits en lien avec l'IFPEN. De juin à septembre 2025, j'ai mené un stage étude et recherche portant sur l'analyse numérique de la méthode Free Vortex Wake appliquée à la simulation des effets de sillage dans les parcs éoliens. Le constat de départ était que la méthode FVW est nettement plus fidèle que la BEM, mais son emploi reste limité par un coût de calcul élevé, par des difficultés de convergence que les ingénieurs corrigent empiriquement à l'aide d'un paramètre de relaxation, et par l'absence quasi totale de littérature mathématique sur les algorithmes réellement implémentés dans les solveurs. Le travail s'est déroulé en deux temps : j'ai d'abord implémenté en Python une version expérimentale de la méthode appliquée à l'éolienne offshore de référence IEA Wind 15 MW dans une configuration volontairement simplifiée avec une seule pale, un vent uniforme et aligné avec l'axe du rotor. Cette implémentation a permis de reproduire les résultats attendus de la méthode et surtout d'observer expérimentalement les comportements de convergence.

J'ai ensuite entrepris l'analyse mathématique proprement dite en me plaçant directement sur les équations discrètes et en adoptant un point de vue vectoriel et matriciel, inédit pour cette méthode. Deux composantes de l'algorithme ont été étudiées. Pour la boucle interne qui détermine à chaque pas de temps la circulation liée à la pale², j'ai établi que la fonction de point fixe est lipschitzienne, calculé explicitement sa jacobienne, majoré sa constante de Lipschitz et déduit du théorème de Banach-Picard une condition suffisante de convergence. Pour le schéma d'advection du sillage, j'ai proposé une condition de stabilité testable numériquement. Ces critères se sont toutefois révélés très pessimistes : sur l'exemple étudié, la majoration de la constante de Lipschitz peut dépasser d'un facteur quarante la valeur réelle dès que la discrétisation est fine, et le critère de stabilité ne conclut jamais en pratique. Le stage s'achevait donc sur un premier cadre d'analyse exploitable dans un cas restreint et sur des pistes explicitement laissées ouvertes que sont la généralisation aux éoliennes multi-pales, la validation du critère de choix du facteur de relaxation et l'exploitation de la jacobienne analytique pour une méthode de Newton.

De son côté, Arthur, alors en Master 1 de mathématiques appliquées à l'Université Paris Saclay / ENSTA, effectuait de mai à août 2025 un stage sur la correction de la théorie BEM par apprentissage statistique en collaboration avec la même équipe de l'IFPEN. Le point de départ était le facteur d'induction axiale dont dérivent la plupart des grandeurs que la BEM permet de calculer. Le levier retenu était l'angle de yaw, c'est-à-

2. La circulation liée à la pale notée Γ_b est également appelée bound circulation. Il s'agit de l'inconnu que la méthode FVW cherche à trouver. Plus de détails sont fournis dans l'annexe I.

dire le désalignement entre le vent incident et l’axe du rotor que la BEM classique ignore et pour lequel existent des corrections algébriques comme celle de Pitt et Peters ou celle développée à l’IFPEN. Trois modèles étaient envisagés de moins en moins dépendants de la BEM. Le premier apprenait la formule de correction algébrique elle-même, sans intérêt pratique puisqu’il ne peut qu’approcher ce qu’il imite, et a servi de banc d’essai pour la prise en main de PyTorch. Le deuxième apprenait directement les inductions axiales corrigées sans passer par la formule et devenait ainsi indépendant de la correction employée. Le troisième, resté à l’état de projet, devait apprendre l’écart entre la BEM et un modèle vortex, seule voie permettant d’espérer un gain de précision réel. Son rapport identifiait clairement la difficulté : rien ne permet de supposer que cette correction soit de nature multiplicative ou additive. Les modèles étaient évalués sur les données expérimentales de l’éolienne New Mexico qui sert aussi de support à ce stage.

Ces deux stages, menés en parallèle sur un même objet mais par des voies très différentes, ont conduit à une spécialisation naturelle dans un premier temps : je me suis approprié les méthodes vortex et leur analyse numérique, tandis qu’Arthur s’est approprié la théorie BEM et l’apprentissage statistique. Le sujet de cette année exploite précisément cette complémentarité.³

Le stage s’inscrit donc autour de deux objectifs principaux. L’objectif A est mené en binôme avec Arthur afin de créer un modèle de substitution pour reproduire la précision de la méthode FVW avec un coût d’évaluation semblable à celui de la BEM. Pour ce faire, on entraîne un réseau de neurones à prédire sur l’ensemble du disque rotor les efforts aérodynamiques calculés par le solveur haute fidélité, à partir des conditions de vents et des efforts calculés par le solveur basse fidélité de la BEM. L’enjeu pratique est direct : les applications qui exigent un très grand nombre d’appels au solveur, notamment l’optimisation de géométrie de pale, les calculs de fatigue et les balayages des cas de charge normalisés, sont aujourd’hui inaccessibles à la FVW.

L’objectif B, individuel, poursuit l’analyse numérique de la méthode FVW entamée l’année précédente. Il s’agit de généraliser le formalisme mathématique à une configuration réaliste avec une éolienne multi-pales et des conditions de vent quelconques, d’en tirer un critère explicite de choix du facteur de relaxation en remplacement de la calibration empirique actuelle, et d’évaluer l’apport d’une méthode de Newton rendue possible par le calcul analytique de la jacobienne.

3. L’objectif A n’est autre que le troisième modèle qu’Arthur n’avait pas eu le temps de mettre en œuvre et sa réalisation suppose de disposer d’un volume important de simulations vortex de référence que le travail conduit sur la FVW permet de produire et de valider. L’objectif B poursuit les perspectives laissées ouvertes par mon stage précédent et les deux objectifs ne sont donc pas indépendants : le second alimente le premier.

La production des données de référence, qui suppose de piloter le solveur SVEN, d'en instrumenter la convergence et de valider les simulations, m'est revenue. Le versant BEM, c'est-à-dire l'exploitation du solveur bemol et de ses variantes de correction, est revenu à Arthur. La conception de la famille de modèles, le protocole de comparaison et l'analyse des résultats ont en revanche été menés conjointement au fil de discussions continues.

L'IFPEN a mis à notre disposition deux solveurs écrits en Python, utilisables et modifiables gratuitement et librement dans le cadre de la recherche académique⁴. Le premier, bemol pour Blade Element Momentum Open-source Library, implémente la théorie BEM et ses principales corrections. Le second, sven pour Solveur Vortex ÉolieNnes, implémente la méthode Free Vortex Wake et a été développé par Caroline Le Guern au cours de sa thèse de doctorat préparée à l'IFPEN de 2021 à 2024. Il est écrit pour tirer parti des processeurs graphiques, sans quoi le coût de la méthode resterait trop pénalisant.

L'IFPEN nous a également fourni les géométries de l'éolienne testée en soufflerie lors de la campagne New Mexico ainsi que des résultats de simulation obtenus avec le solveur CASTOR sur cette même éolienne. CASTOR est un solveur vortex plus abouti que SVEN mais il n'est pas ouvert et est intégré à la solution commerciale DeepLines Wind destinée aux industriels. Ces résultats nous servent d'élément de comparaison sans que nous puissions inspecter le code qui les produit.

L'INRIA a par ailleurs acquis pour ce stage une station de travail ThinkStation PGX SFF équipée de plusieurs processeurs graphiques et dédiée au développement en apprentissage automatique. Elle sert à l'entraînement des réseaux de neurones de l'objectif A, mais aussi à l'exécution des simulations SVEN dont la charge de calcul est considérable et dont l'implémentation est conçue pour exploiter les GPU. C'est sur cette machine qu'a été produit l'ensemble des résultats présentés dans ce rapport.

4. Contrairement à une licence open source classique, ces codes ne peuvent pas être utilisés à des fins commerciales et les droits de propriété intellectuelle sur les versions modifiées sont cédés à l'IFPEN.

2 Objectif A : Augmentation de fidélité par apprentissage statistique

Cette mission a été réalisée en binôme avec Arthur.

2.1 Méthodologie

L'IFPEN met à notre disposition deux solveurs aérodynamiques de fidélités très différentes. Le premier, **bemol**, implémente la théorie BEM décrite dans l'annexe III. Il repose sur des hypothèses simplificatrices, notamment l'indépendance des sections de pale. Le second, **sven**, implémente la méthode Free Vortex Wake étudiée dans la Section 3. Il représente explicitement le sillage et est nettement plus fidèle, mais son coût est bien plus élevé.

L'objectif de cette mission est de construire un modèle statistique qui reproduise la précision de **sven** pour un coût d'évaluation comparable à celui de **bemol**. Un tel modèle de substitution, ou méta-modèle, présente un intérêt direct pour les applications où le solveur doit être appelé un très grand nombre de fois, par exemple pour l'optimisation de la géométrie de pale ou pour l'étude des DLC.

2.1.1 Variables du problème

Les pales sont discrétisées en sections repérées par leur rayon r . La géométrie d'une section est déterminée par sa corde c et son angle de vrillage β . Son comportement aérodynamique est donné sous forme de tables polaires C_L et C_D , coefficients de portance et de traînée fonctions de l'angle d'attaque α , c'est-à-dire l'angle entre la vitesse relative au profil et la corde. Ce sont précisément l'angle d'attaque et la norme de la vitesse relative qui constituent les inconnues résolues par **bemol** et **sven**, et dont se déduisent les efforts aérodynamiques. Ces derniers sont décomposés en une force normale F_n et une force tangentielle F_t à la section, exprimées par unité de longueur de pale.

À ces grandeurs locales s'ajoutent le pitch global θ_{pitch} , la vitesse de rotation Ω , la géométrie d'ensemble (R , R_{hub} , nombre de pales B) et les conditions de vent : la norme du vent incident U_∞ , l'angle de yaw γ que celui-ci forme avec l'axe du rotor, et la masse volumique de l'air ρ . On rappelle que la vitesse de rotation et la vitesse du vent définissent le *Tip Speed Ratio* $\text{TSR} = \Omega R / U_\infty$. On travaille en régime permanent : les efforts sont supposés périodiques et ne dépendent plus que de la position azimutale θ de la pale.

Les variables d'entrée se rangent ainsi en trois catégories :

- la position spatio-temporelle d'un effort : r et θ ;
- la géométrie de la turbine et ses profils aérodynamiques : c , β , C_L , C_D , R , R_{hub} ;
- les conditions environnementales et de fonctionnement : TSR, γ , Ω , ρ , θ_{pitch} .

Une différence entre les deux solveurs conditionne toute la suite. Puisque la BEM suppose les sections indépendantes, **bemol** peut être interrogé pour un rayon et un azimut donnés sans rien calculer ailleurs. La FVW, au contraire, nécessite de se donner une discrétisation spatiale et temporelle : lorsque sven est appelé, il calcule les efforts sur toute une grille de rayons et d'azimuts. Il prend alors en compte les corrélations entre efforts voisins induites par le sillage. Le choix de la discrétisation n'est d'ailleurs pas libre : elle doit permettre la convergence de la méthode FVW et rester compatible avec les calculs par éléments finis de la modélisation structurelle, qui sortent du cadre de cette étude.

2.1.2 Réduction du problème

Plus un méta-modèle se veut général, plus il exige de situations d'apprentissage pour inférer correctement. Plusieurs paramètres ont donc été figés en première approche.

La discrétisation radiale est la plus délicate à faire varier : chaque élément ajouté doit se voir associer une corde, un vrillage et surtout un profil aérodynamique, ce dernier étant difficile à paramétrer aussi bien méthodologiquement que numériquement. Elle a été fixée à $N_r = 36$ sections par pale. La discrétisation azimutale a été fixée à $N_\theta = 72$ éléments sur les conseils des collègues de l'IFPEN, ce qui constitue un compromis acceptable entre précision et temps de calcul. Enfin, la version de la BEM utilisée est purement stationnaire alors que celle de la FVW ne l'est pas : pour éliminer la variable temporelle, on retient la distribution moyennée sur les trois derniers tours simulés.

Les efforts sont donc prédits simultanément sur une grille polaire fixée de $36 \times 72 = 2592$ points, en deux composantes F_n et F_t , soit 5184 coefficients par cas de vent. Les variables de la deuxième catégorie étant d'autant plus nombreuses que la grille est fine, nous les avons figées en travaillant sur une turbine unique, l'éolienne New Mexico présentée dans l'annexe IV. Parmi les conditions de fonctionnement, nous avons retenu les deux plus significatives, le TSR et le yaw, et fixé le reste aux valeurs de l'expérimentation : $B = 3$, $R_{\text{hub}} = 0.210 \text{ m}$, $R = 2.25 \text{ m}$, $\theta_{\text{pitch}} = -2.30^\circ$, $\rho = 1.198 \text{ kg m}^{-3}$, $\Omega = 44.5 \text{ rad s}^{-1}$.

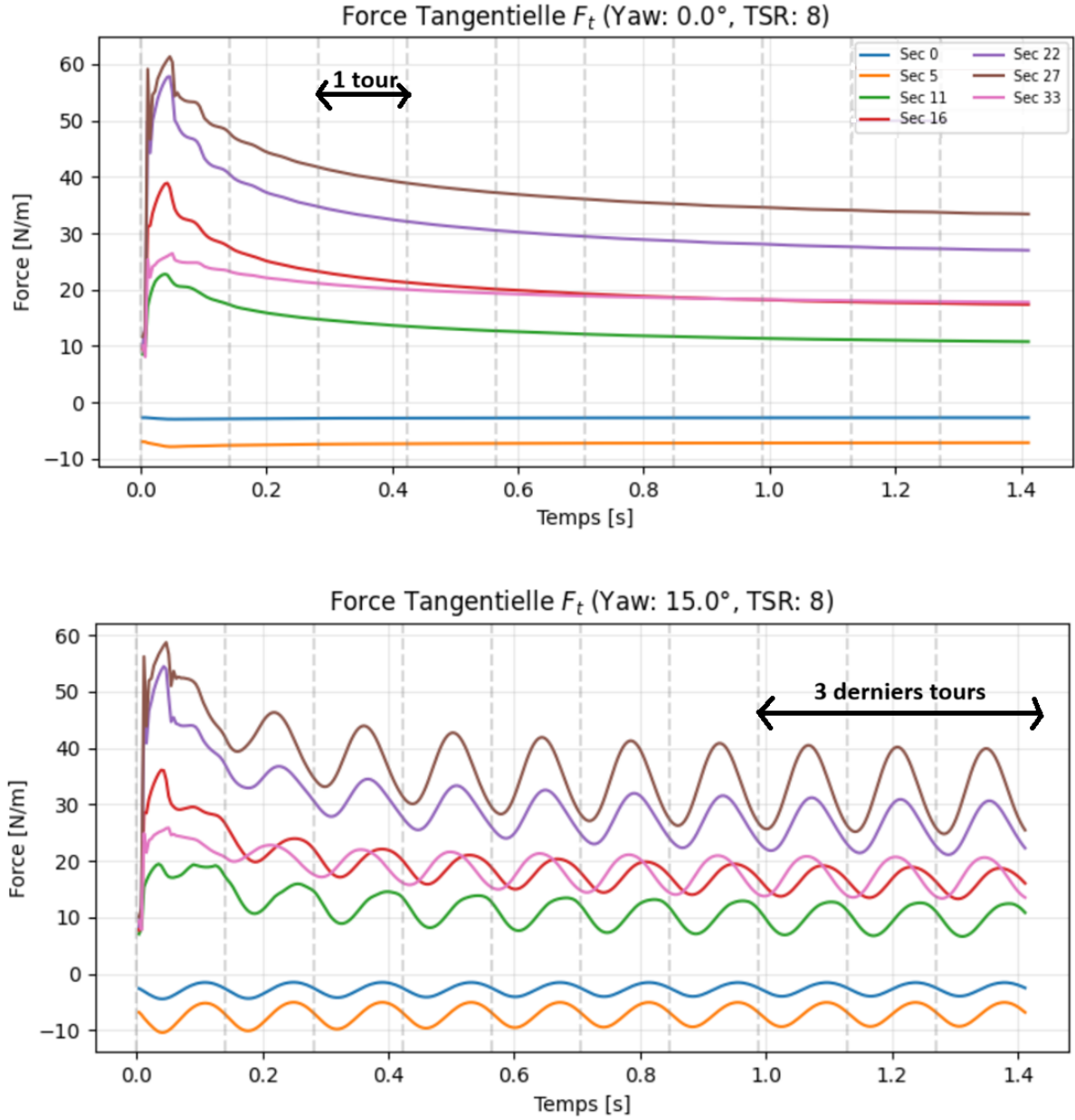


FIGURE 1 – Force tangentielle pour différentes sections de pale en fonction du temps, obtenue avec le solveur **sven** sur l'éolienne New Mexico.

2.1.3 Le choix de la variable cible

Puisqu'il s'agit de transmettre à la BEM l'information contenue dans la FVW, le premier enjeu est d'identifier une *variable cible* qui soit présente dans les deux modèles avec la même signification physique. Quatre candidates se présentaient : les efforts normaux et tangentiels, les vitesses relatives accompagnées de l'angle d'attaque, les facteurs d'induction, et les densités de puissance. Seules les deux premières ont été explorées, les autres seront étudiées ultérieurement.

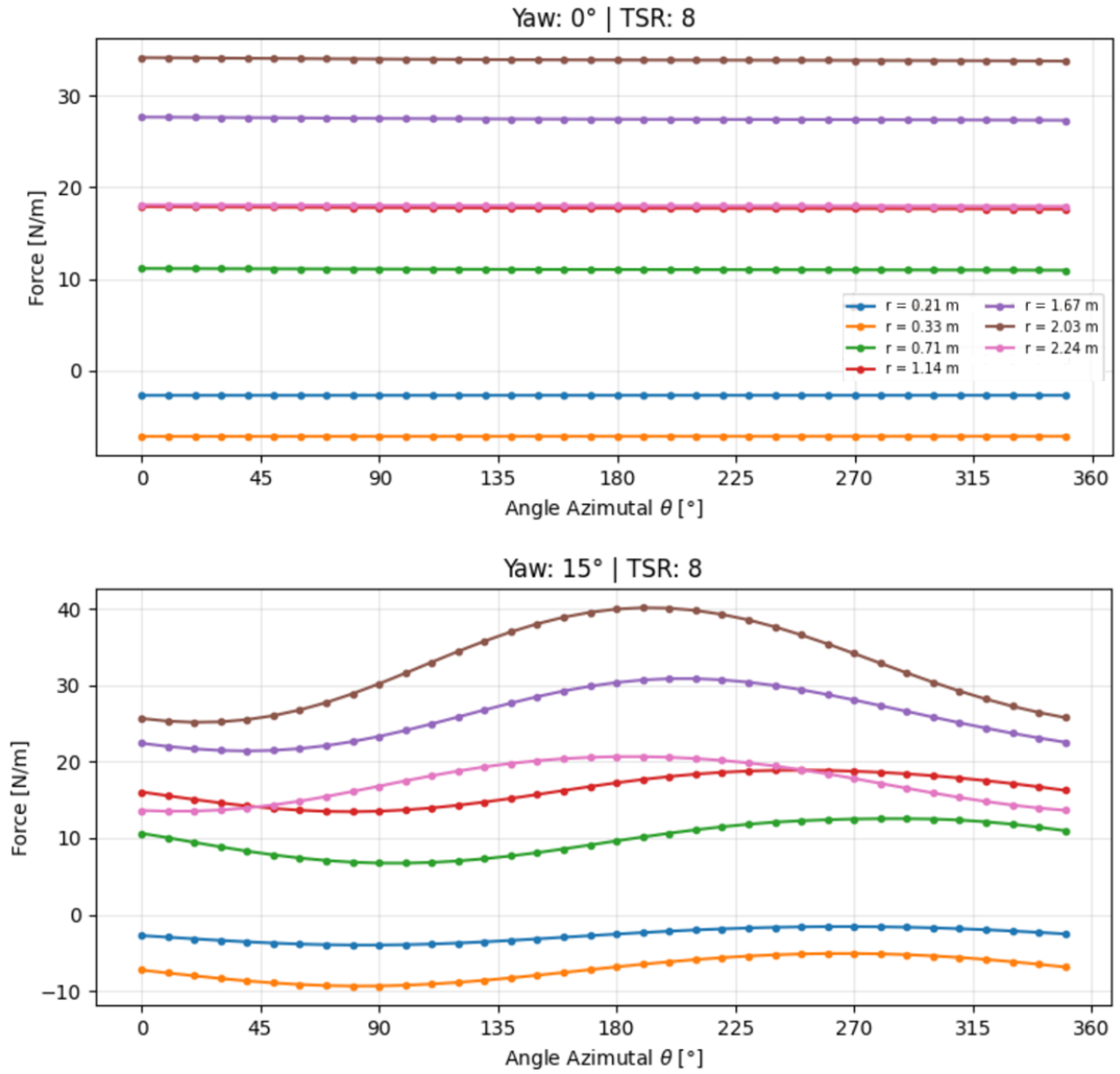


FIGURE 2 – Force tangentielle pour différentes sections de pale en fonction de l'azimut θ , obtenue avec le solveur **sven** sur l'éolienne New Mexico.

Le principe de l'apprentissage supervisé est alors le suivant : les sorties de la BEM constituent les covariables, et les sorties de la FVW obtenues pour les mêmes paramètres de simulation constituent les étiquettes. Le réseau reçoit en entrée une partie des paramètres de simulation ainsi que, le cas échéant, la distribution BEM de la variable cible sur la grille, et doit produire une nouvelle distribution qui minimise un critère par rapport à celle calculée par la FVW.

2.1.4 Génération des données

Un plan d'expériences par hypercube latin (LHS) de 200 couples (TSR, γ) a été tiré, avec $\text{TSR} \in [4, 12]$ et $\gamma \in [-30^\circ, 30^\circ]$. Contrairement à une grille uniforme, un échantillonnage LHS couvre le domaine sans aligner les points sur des valeurs privilégiées, ce qui rend l'évaluation de la capacité de généralisation plus exigeante : le modèle doit être bon en tout point du domaine, et non seulement sur les nœuds d'une grille. Pour chacun de ces couples, les efforts ont été calculés avec `bemol` d'une part et avec `sven` d'autre part.

`sven` étant un solveur temporel, l'obtention d'un effort en régime permanent suppose de simuler suffisamment longtemps pour que les efforts deviennent périodiques. Pour l'éolienne New Mexico, il faut compter dix à quinze tours de pale, comme l'illustre la Figure 1 ; la moyenne sur les trois derniers tours fournit le profil azimuthal de la Figure 2. C'est ce coût de simulation qui motive l'ensemble de la démarche.

Quatre-vingts pour cent des couples servent à l'entraînement, les vingt pour cent restants constituant l'ensemble de test sur lequel toutes les performances rapportées ici sont mesurées : il s'agit donc systématiquement de conditions de vent jamais vues à l'entraînement. Par ailleurs, tous les modèles présentés n'exploitent que la moitié des couples d'entraînement disponibles⁵, ce que traduit le suffixe P50 dans leur nom.

2.1.5 Les axes de conception explorés

Aucun raisonnement formel n'établit quelle architecture de réseau est optimale pour un problème donné. Plutôt que de postuler une architecture, nous avons donc construit une famille de modèles paramétrée par cinq axes de conception indépendants, de manière à pouvoir trancher expérimentalement chaque question. Ces axes sont résumés dans la Table 1 ; leur formalisation complète, les architectures correspondantes et la convention de nommage figurent dans l'annexe V.

5. En effet, l'étude de l'impact de la quantité de données d'entraînement sur les performances est en cours d'étude mais ne sera pas intégré dans ce rapport de stage.

Axe	Valeurs	Question posée
Topologie	GV / GM	Le champ d'efforts est-il mieux traité comme un vecteur aplati par un perceptron multicouche, ou comme une image polaire par un réseau convolutif ?
Intégration de la BEM	0 / 1 / 2 / 2+	Faut-il fournir la prédiction BEM au réseau, et sous quelle forme : pas du tout (0), en entrée avec apprentissage du résidu FVW – BEM (1), en entrée avec apprentissage de la grandeur absolue (2), ou compressée au préalable dans l'espace latent d'un auto-encodeur (2+) ?
Variable cible	f / v	Vaut-il mieux prédire directement les forces, ou passer par les vitesses relatives puis appliquer la relation physique qui les relie aux forces ?
Auto-encodeur	D0 / DXY	Le champ discrétisé sur 5184 coefficients étant vraisemblablement très redondant, gagne-t-on à le compresser dans un espace latent de dimension réduite ?
Option de perte	A / B	L'erreur locale doit-elle être normalisée point par point par la vérité terrain, ou par la pression dynamique locale ?

TABLE 1 – Les cinq axes de conception explorés et la question que chacun permet de trancher expérimentalement.

Trois de ces axes méritent un mot d'explication. Sur la variable cible, deux intuitions s'opposent : la première veut que prédire les vitesses soit plus facile, puisque la chaîne physique aval fournit gratuitement au réseau la relation qui mène aux forces et lui laisse donc « moins » à apprendre ; la seconde veut au contraire que donner une information intermédiaire imparfaite ne fasse que compliquer la tâche, et qu'il vaille mieux aller droit au but. On a étudié les auto-encodeurs car représenter le champ des efforts par 5184 composantes peut sembler redondant, la variété des champs physiquement admissibles étant vraisemblablement de dimension bien plus faible. Quant à la topologie, on serait tenté de croire que le réseau convolutif est avantage, puisqu'il prend en compte une représentation spatiale du champ et peut en extraire des propriétés. Il serait donc un bon candidat pour capter des effets de voisinage que la BEM ignore par définition.

2.1.6 Fonction de perte et métriques d'évaluation

L'apprentissage est gouverné par une perte composite $\mathcal{L} = \lambda_1 \mathcal{L}_1 + \lambda_2 \mathcal{L}_2 + \lambda_3 \mathcal{L}_3$, combinaison convexe de trois termes : une erreur sur les coefficients globaux C_P et C_T obtenus par intégration le long de la pale, une erreur locale sur les forces, et une erreur locale sur les vitesses. Les poids λ_i ne sont pas fixés arbitrairement mais optimisés au même titre que les autres hyperparamètres.

Les deux options A et B correspondent à deux façons de normaliser les termes locaux⁶, et ce choix modifie la lecture des résultats. L’option A divise l’erreur par la vérité terrain point par point : elle évalue ainsi l’écart en valeur relative, mais devient très sévère là où l’effort est proche de zéro, c’est-à-dire au pied de pale⁷. L’option B normalise par la pression dynamique locale qui ne s’annule jamais. Cependant, elle donne plus de poids aux forces normales car celles-ci sont en moyenne dix fois plus élevées que les forces tangentielles.

L’évaluation s’appuie sur trois scores composites définis dans la Section V.5.3 : le score *A* agrège les erreurs relatives locales, le score *B* les erreurs normalisées par la pression dynamique, et le score *C* les erreurs relatives sur les coefficients intégrés C_P et C_T . Seul le score *A* ou *B* est un objectif d’optimisation, le score *C* étant calculé à titre informatif. La prédiction BEM brute est évaluée avec exactement les mêmes métriques et sur le même ensemble de test, ce qui fournit une référence directement comparable, désignée par la suite comme la *baseline*.

Pour chaque configuration, les hyperparamètres⁸ sont recherchés par Optuna⁹, l’objectif minimisé étant le score *A* ou *B* moyenné sur cinq *folds* de validation croisée. Les plages de recherche et les paramètres fixes du protocole sont détaillés dans la Section V.4.4.

2.1.7 Méthodologie d’élitage : la compétition des modèles

Les cinq axes de conception engendrent plus d’une centaine de combinaisons, ce qui interdit un test exhaustif. Un élagage a donc été organisé sous forme de compétition : plutôt que de comparer tous les modèles entre eux, on identifie axe par axe quelle valeur ressort comme la plus performante.

Les scores *A* et *B* n’étant pas comparables entre eux, le travail a été scindé en deux branches indépendantes, une par score. Le mode 2+ n’ayant aucun sens sans donnée BEM, étant peu pertinente avec l’architecture convolutive et inexistant sans auto-encodeur, il n’engendre que quatre modèles au lieu des seize d’un mode ordinaire. La variante de correction BEM n’est pas non plus mise en compétition : elle est fixée à la variante IFPEN, ce choix relevant à la fois d’un compromis de coût et du fait que la question ne s’est pas présentée d’emblée. Au total, cinquante-deux modèles restent à évaluer.

6. Attention à ne pas confondre le nom des options de perte avec le nom des objectifs du rapport.

7. Pour être plus précis, l’effort normal ne s’annule jamais, sa valeur minimale est de l’ordre de quelques Nm et est atteinte au pied de pale (dans la zone à 10% de l’envergure R). C’est l’effort tangentiel qui s’annule (changement de signe) dans la zone à 20 % de l’envergure R .

8. Il s’agit du taux d’apprentissage, de la profondeur et largeur du réseau, du taux de dropout, des poids de la perte ainsi que de la nature et de la dimension de l’auto-encodeur

9. Optuna est un outil d’optimisation automatique d’hyperparamètres qui utilise des stratégies stochastiques, évitant ainsi d’avoir à tester exhaustivement toutes les combinaisons.

Chaque compétition comporte six épreuves, décrites dans la Table 2. Chaque épreuve isole un axe en comparant des blocs de configurations identiques par ailleurs, et désigne une valeur gagnante ; les vainqueurs sont ensuite confrontés directement les uns aux autres. Ce sont eux qui feront l’objet des études complémentaires sur la variante BEM et sur la taille du jeu de données.

N°	Question	Axe isolé
1	Quel est le meilleur modèle sans BEM ?	Sélection préalable parmi les modèles 0
2	Sans BEM, cible résiduelle ou directe ?	Mode d’intégration 0 / 1 / 2
3	Architecture convolutive ou perceptron ?	Topologie GM / GV
4	Prédire un champ de force ou de vitesse ?	Variable cible f / v
5	Avec ou sans auto-encodeur ?	D0 / DXY
6	Avec ou sans compression préalable ?	Mode 2+ contre les vainqueurs

TABLE 2 – Les six épreuves de la compétition, menée séparément pour le score A et pour le score B .

Une réserve méthodologique doit cependant être signalée ici, elle concerne l’épreuve 5. Les auto-encodeurs sont optimisés et pré-entraînés séparément, sur la totalité du jeu d’entraînement. Les modèles qui en utilisent un partent donc potentiellement avec un avantage : leur décodeur a déjà vu de l’information sur les étiquettes que les modèles sans auto-encodeur n’ont pas. Les comparaisons de cet axe doivent être lues avec cette précaution.

2.2 Résultats

2.2.1 Performance d’ensemble

Le Table 3 rassemble les vainqueurs de chaque branche.

Le gain sur les scores locaux est net : facteur 2,9 sur le score A et facteur 4,3 sur le score B . Il est encore plus marqué sur les grandeurs intégrées, où le score C passe de 34,3 % à environ 3 %, soit plus d’un ordre de grandeur, alors même que ce score n’était pas optimisé. Ce dernier point peut s’expliquer par le fait que l’intégration le long de la pale et la moyenne azimutale lissent les erreurs locales. Le principe même d’une correction par apprentissage statistique se trouve donc validé, et le compromis visé, à savoir une erreur nettement inférieure à celle de la BEM pour un temps de calcul sans commune mesure avec celui de la FVW, est atteint. En effet, une fois que le modèle est entraîné, sur la machine de l’INRIA, l’ordre de grandeur d’une inférence sur un nouveau (yaw, TSR) est du même ordre que celui de la BEM à savoir 10 secondes contre 1000 secondes pour la FVW.

Modèle	Score	Max	Score C	Params
	(%)	(%)	(%)	(10 ⁶)
<i>Branche A</i>				
BEM IFP (référence)	79,18	1273,22	34,27	–
GV_0_f_D0_A_P50	27,33	685,97	3,02	1,075
GV_2+_f_IFP_DV64_A_P50	31,92	750,71	2,86	0,084
<i>Branche B</i>				
BEM IFP (référence)	14,10	35,24	34,27	–
GV_0_f_DV512_B_P50	3,29	34,49	3,61	0,346
GV_2+_f_IFP_DV128_B_P50	3,40	34,88	2,88	0,100

TABLE 3 – Vainqueurs de chaque branche de la compétition, comparés à la baseline BEM sur l’ensemble de test. Les scores des branches A et B ne sont pas comparables entre eux.

Cependant, la colonne **Max**, qui reporte l’erreur au point le plus défavorable du disque, est divisée par un peu moins de deux en branche *A* mais reste pratiquement inchangée en branche *B* (35,2 % pour la baseline contre 34,5 % pour le vainqueur). Autrement dit, les modèles corrigent efficacement l’erreur sur la majeure partie du disque sans résorber le pire point.

2.2.2 Résultats des épreuves

Les tableaux complets figurent dans l’annexe VI. Quatre enseignements s’en dégagent.

Le premier concerne l’épreuve 4 dans laquelle **les forces l’emportent sur les vitesses**. C’est le résultat le plus régulier de toute la compétition. Les modèles à forces gagnent onze blocs sur treize en branche *A* et neuf sur treize en branche *B*, et l’écart relatif entre le meilleur modèle à forces et le meilleur modèle à vitesses est du même ordre dans les deux branches. C’est donc la seconde des deux intuitions évoquées plus haut qui se vérifie : le passage par les vitesses ajoute une chaîne d’interpolation des polaires entre la sortie du réseau et la grandeur évaluée, et cette source d’erreur supplémentaire n’est pas compensée par le gain de contrainte physique. La conclusion pratique est de réserver les modèles à vitesses aux cas où c’est la vitesse elle-même que l’on cherche à prédire.

Le deuxième enseignement concerne l’épreuve 2 dans laquelle **l’apport de la BEM est conditionnel**. C’est le résultat le plus contre-intuitif. On aurait pu s’attendre à ce que fournir la prédiction BEM aide systématiquement. Ce n’est pas le cas. Pour la topologie convolutive, l’apport est spectaculaire : le score *A* de GM_0_f_D0 passe de 70,9 % à 30,4 %

avec apprentissage du résidu, et le score B de 7,4 % à 3,5 %. Pour la topologie vectorielle en revanche, la BEM dégrade légèrement les performances : 27,3 % sans BEM contre 35,1 % avec, en score A . Il apparaît donc que la BEM apporte un gain précisément dans les configurations où le modèle sans BEM est mauvais. On souhaitait en effet qu'elle joue un rôle d'appui en fournissant une première approximation du champ que le réseau n'a plus qu'à corriger. Par contre, les modèles qui sont déjà performants sans BEM, ne sont pas améliorés, le vainqueur de la branche A , étant d'ailleurs justement un modèle sans BEM.

Le troisième enseignement concerne l'épreuve 5, il est de même nature que le second : **l'auto-encodeur a un apport conditionnel**. Il transforme radicalement les configurations défaillantes : GM_0f passe de 70,9 % à 32,1 % en score A , tout en divisant par seize le nombre de paramètres, de 25,1 à 1,5 million, mais il n'améliore pas les configurations déjà performantes. En branche B , où les modèles à auto-encodeur sont largement majoritaires dans le haut du classement, il paraît nettement plus utile qu'en branche A . Ces observations concordent avec celles de l'épreuve 2 : les écarts observés reflètent moins un avantage intrinsèque de ces mécanismes qu'une correction des mauvaises performances de certaines architectures sans aucunes améliorations des modèles qui sont déjà performants. La réserve sur le pré-entraînement des auto-encodeurs signalée précédemment invite de surcroît à ne pas surestimer l'apport des auto-encodeurs.

Enfin, le dernier enseignement concerne les Épreuves 3 et 6 pour lesquelles **les topologies se valent, mais pas à coût égal**. La topologie vectorielle l'emporte dans sept blocs sur douze en branche A et neuf sur douze en branche B . Aucune des deux ne domine franchement et les écarts les plus importants sont à l'avantage de GV , ce qui ne confirme pas l'intuition selon laquelle le convolutif tirerait parti des effets de voisinage. Il faut dire que ces effets n'ont jamais été caractérisés : rien ne garantit qu'ils soient d'une amplitude détectable, même s'il serait physiquement surprenant qu'ils soient nuls. Le mode 2+ de l'épreuve 6 s'avère très compétitif : il atteint 3,40 % en score B contre 3,29 % pour le vainqueur, soit trois pour cent d'écart, avec seulement 0,10 million de paramètres. Il est ainsi plus de trois fois plus compact que le vainqueur de sa branche et deux cent cinquante fois plus compact que $\text{GM}_0\text{f}_{\text{DV128B}}$, qui atteint 3,42 % avec 25,3 millions de paramètres. C'est un argument sérieux dès lors que le coût d'inférence devient le critère dimensionnant, ce qui est précisément la motivation de l'objectif.

2.2.3 Distribution spatiale de l'erreur

Les scores agrégés masquent la structure spatiale de l'erreur. La Figure 3 et la Figure 4 comparent, pour un cas de test représentatif ($\gamma = -7.40^\circ$, $\text{TSR} = 6,96$), la carte d'erreur de la BEM à celle du modèle sur l'ensemble du disque rotor. Les cartes correspondantes pour la force tangentielle sont reportées dans l'annexe VI.

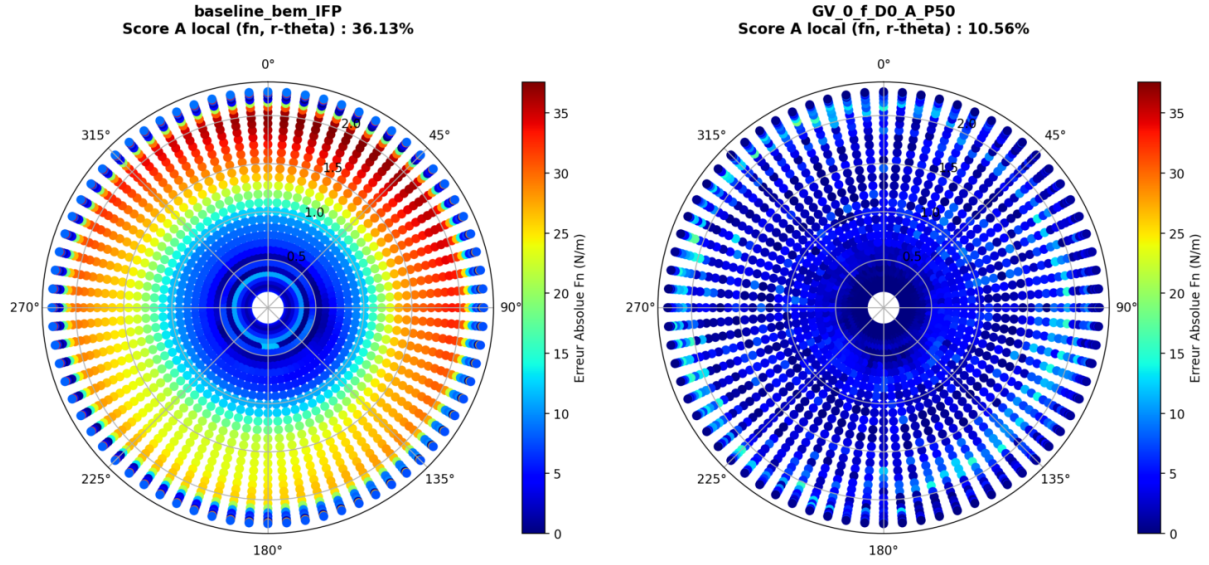


FIGURE 3 – Erreur absolue sur la force normale F_n (N m⁻¹), pour la baseline BEM IFP (à gauche) et le modèle GV_0_f_D0_A_P50 (à droite), au cas de test $\gamma = -7.40^\circ$, TSR = 6,96.

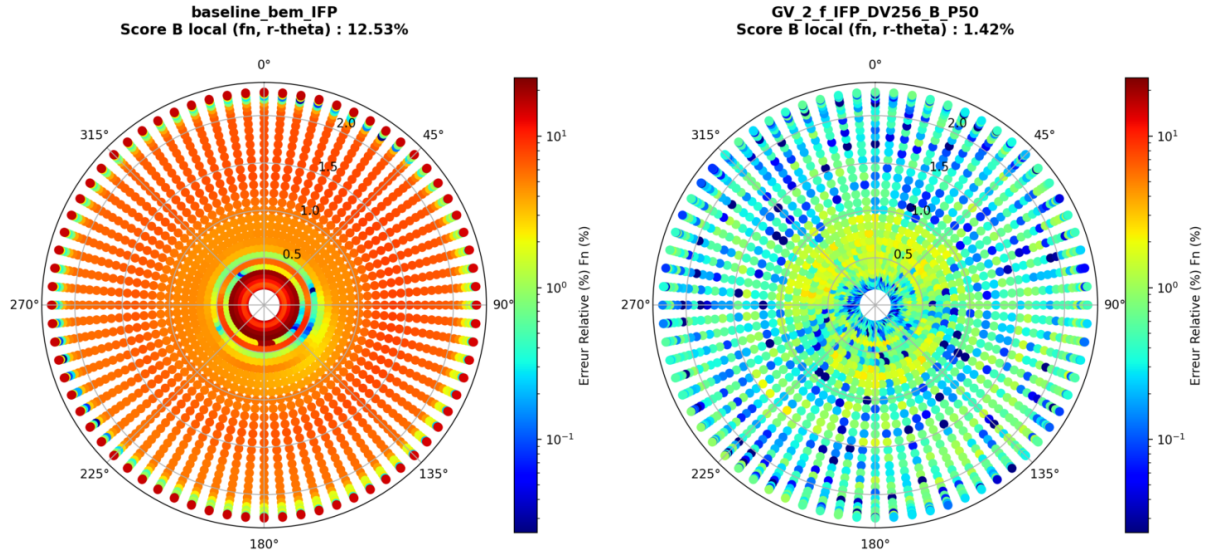


FIGURE 4 – Erreur locale de type B sur la force normale F_n , pour la baseline BEM IFP (à gauche) et le modèle GV_2_f_IFP_DV256_B_P50 (à droite), au cas de test $\gamma = -7.40^\circ$, TSR = 6,96. Échelle logarithmique.

En valeur absolue (Figure 3), l'erreur de la BEM croît fortement avec le rayon et atteint son maximum dans la zone qui précède le bout de pale, là où les efforts sont les plus élevés¹⁰. Le modèle ramène cette erreur à un niveau uniformément faible sur l'ensemble du disque. Le score local de type *A* (erreur relative) passe de 36,1 % à 10,6 % sur ce cas.

En score local de type *B* (Figure 4), la lecture est différente et complémentaire. L'erreur de la BEM se présente comme un biais quasi uniforme de l'ordre de quelques pour cent sur presque tout le disque, qui n'explose qu'au voisinage immédiat du pied de pale et du bout de pale¹¹. Le modèle abaisse ce biais d'environ un ordre de grandeur, le score local passant de 12,5 % à 1,4 %. De surcroît, il corrige également très bien les zones où la BEM faisait le plus d'erreur.

2.2.4 Grandeurs intégrées et généralisation

La Figure 5 reporte l'erreur relative sur le coefficient de puissance C_P pour chacun des couples (γ, TSR) du plan d'expériences.

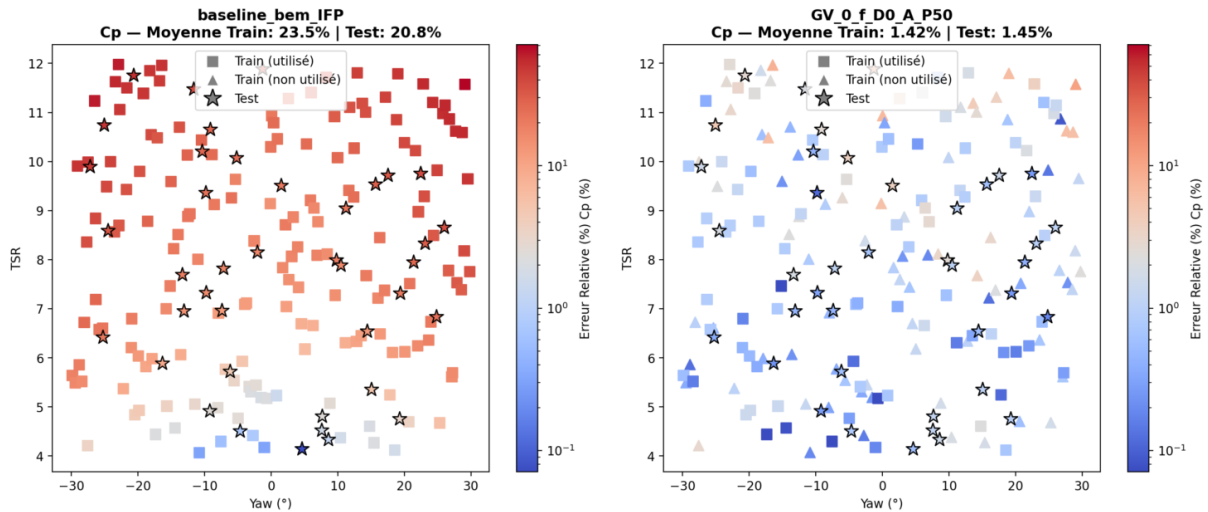


FIGURE 5 – Erreur relative sur le coefficient de puissance C_P pour chaque couple (γ, TSR) du plan d'expériences, pour la baseline BEM IFP (à gauche) et le modèle GV_0_f_D0_A_P50 (à droite). Les carrés sont les couples d'entraînement effectivement utilisés, les triangles ceux écartés par le sous-échantillonnage P50, et les étoiles les couples de test.

Deux constats ressortent de cette figure. D'abord, l'erreur de la BEM n'est pas répartie uniformément dans le plan des conditions de vent : elle est faible à bas TSR et élevée partout ailleurs. Le modèle prédictif, lui, semble plus homogène : les meilleures performances ne se concentrent plus dans une région particulière du domaine.

10. Cette zone est située à 90 % de l'envergure R .

11. La première zone est située entre 10% et 15% de l'envergure R tandis que la seconde est située à 100% de l'envergure R .

Ensuite, l'erreur moyenne sur C_P vaut 1,42 % sur l'entraînement et 1,45 % sur le test, contre 23,5 % et 20,8 % pour la baseline. La quasi-égalité des deux valeurs indique une absence de surapprentissage : le modèle ne se contente pas de mémoriser les couples vus. Ce constat est renforcé par le fait que les triangles, qui correspondent aux couples d'entraînement écartés par le sous-échantillonnage, sont aussi bien prédits que les carrés effectivement utilisés¹². Ceci motive directement l'étude en cours sur la proportion de données.

2.3 Bilan et travail futur

2.3.1 Bilan

Sur l'éolienne New Mexico et pour un domaine de fonctionnement couvrant $\text{TSR} \in [4, 12]$ et $\gamma \in [-30^\circ, 30^\circ]$, des modèles de substitution ont été construits qui divisent par un facteur trois à quatre l'erreur locale de la BEM par rapport à la référence FVW, et par plus de dix son erreur sur les coefficients intégrés, tout en s'évaluant cent fois plus rapidement qu'une simulation `sven`. La compétition en six épreuves a permis de dégager quelques régularités : les forces constituent une meilleure variable cible que les vitesses, l'apport de la BEM en entrée comme celui de l'auto-encodeur tient surtout à ce qu'ils compensent le mauvais conditionnement de certaines architectures, et le mode 2+ atteint une performance proche de la meilleure avec un nombre de paramètres très réduit.

Le bilan doit néanmoins rester mesuré. On aurait pu attendre de la BEM qu'elle se révèle plus utile qu'elle ne l'a été. Les résultats portent sur une seule turbine et rien ne garantit qu'ils se transposent à une autre géométrie. Les écarts entre configurations sont souvent modestes au regard de la dispersion des scores, ce qui invite à les lire comme des tendances plutôt que comme des classements établis. Les jeux d'hyperparamètres retenus comme optimaux varient très fortement par ailleurs d'une exécution à l'autre¹³, ce qui peut traduire soit une non-unicité de l'optimum¹⁴, soit des phases d'optimisation trop courtes. Relancer des recherches plus longues donnerait des indices. Enfin, certaines métriques mériteraient d'être rediscutées, notamment en ce qui concerne les cas où l'erreur au point le plus défavorable n'est pas améliorée.

12. Pour la baseline BEM, la notion de points d'entraînement utilisés ou non (carrés ou triangles) et de points de test (triangles) n'a pas de signification particulière puisque ce n'est pas une méthode d'apprentissage statistique. L'utilisation de ce formalisme sert juste à la comparaison avec les modèles de réseaux de neurones.

13. Par exemple, pour un même modèle à auto-encodeur, la dimension de l'espace latent jugée optimale varie dans toute la plage (de 16 à 1024), idem pour les poids de la loss λ_1 , λ_2 et λ_3 où parfois Optuna choisit de concentrer tout le poids sur un seul terme et d'autres fois de répartir parfaitement les poids.

14. Cela pourrait même traduire le fait que ces hyperparamètres testés ne soient pas significatifs, c'est à dire qu'ils ont peu d'influence sur la performance.

2.3.2 Travaux en cours

Trois études sont engagées et seront achevées après le rendu de ce rapport.

La première porte sur l'**influence du volume de données d'entraînement**. Tous les résultats présentés utilisent la moitié des couples disponibles. Le protocole décrit dans la Section V.4.3 permet de balayer plusieurs proportions et de tracer les courbes de performance correspondantes. Notre hypothèse est que les modèles sans BEM se renforcent lorsque le jeu de données grandit, tandis que ceux informés par la BEM devraient prendre l'avantage sur des jeux réduits. La physique compenserait alors le manque d'échantillons. Si elle se vérifie, cette hypothèse réconcilierait les résultats de l'épreuve 2 avec l'intuition initiale et indiquerait dans quel régime chaque famille de modèles est pertinente.

La deuxième vise à **vérifier l'influence de la variante de correction BEM** utilisée en entrée. Les résultats reposent tous sur la variante IFPEN : les variantes DUM et P&P décrites dans la Section V.4.2 restent à comparer. Il s'agit de savoir si le réseau tire réellement parti de la qualité de la correction fournie, ou s'il n'y lit qu'une information géométrique grossière, auquel cas la sophistication du modèle BEM amont serait sans effet. L'hypothèse inverse mérite également d'être testée : une BEM sous sa forme la plus simple pourrait s'avérer plus facile à corriger qu'une variante élaborée.

La troisième concerne la **sensibilité spatiale des modèles utilisant la BEM**. Le principe est de perturber l'entrée BEM en un point unique du disque et d'observer comment la prédiction est modifiée sur l'ensemble du disque. Si la perturbation ne se propage pas, le modèle traite chaque point indépendamment et n'exploite pas les corrélations spatiales que la méthode FVW, elle, capture. Si elle se propage, il reste à caractériser la portée et la forme de cette influence. C'est l'expérience la plus directement liée à la motivation physique du travail, puisque la prise en compte des interactions entre sections est précisément ce qui distingue la FVW de la BEM. Elle apporterait aussi un élément de réponse à l'épreuve 3, en établissant si les effets de voisinage ont une amplitude détectable.

2.3.3 Perspectives et valorisation

À plus long terme, l'ambition est de généraliser les modèles à une géométrie de pale quelconque, ce qui suppose de faire entrer dans l'espace des variables les cordes, les vrillages et les polaires. Une étape intermédiaire consisterait à généraliser d'abord à l'ensemble des conditions environnementales et de fonctionnement, au lieu de ne faire varier que le TSR et le yaw. On peut d'ailleurs conjecturer qu'une telle généralisation rendra indispensable un minimum d'information physique en entrée, et donc que la BEM y retrouvera l'utilité que le cadre réduit de cette étude ne lui a pas laissé démontrer.

Cette question conditionne directement les possibilités de valorisation. D’après les échanges menés par l’équipe, une publication dans *Wind Energy Science*, la revue de référence du domaine, supposerait précisément ce degré de généralité : des résultats établis sur une seule turbine y seraient jugés trop spécifiques. Les revues généralistes de mécanique des fluides, telles que le *Journal of Fluid Mechanics* ou *Physics of Fluids*, ne paraissent pas non plus adaptées, les travaux ne relevant pas d’une avancée fondamentale sur ces sujets.

En revanche, les résultats obtenus semblent d’ores et déjà présentables en conférence. Trois pistes ont été identifiées :

- **WESC 2027**, qui se tiendra à Copenhague du 29 juin au 2 juillet 2027, avec un résumé de trois pages à soumettre pour janvier 2027. Il n’y a pas d’actes à proprement parler, mais des éditions spéciales publiées ultérieurement, dont la sélection passe par un processus de relecture comparable à celui d’une revue.
- **TORQUE 2028**, qui demande un résumé de quatre pages pour la sélection, puis un article de dix pages soumis à relecture.
- **le CFM 2027** (Congrès Français de Mécanique), qui dispose d’actes et ouvre la possibilité d’une publication ultérieure en revue.

Compte tenu des échéances et du degré de maturité des travaux, le CFM 2027 puis TORQUE 2028 paraissent les cibles les plus appropriées, la seconde permettant d’intégrer les résultats des études en cours ainsi qu’un éventuel début de généralisation à d’autres turbines.

3 Objectif B : Analyse numérique de la méthode Free Vortex Wake (FVW)

Cette mission est individuelle.

3.1 Méthodologie

3.1.1 Position du problème

La méthode FVW, décrite en détail dans l'annexe I, s'organise autour de deux boucles imbriquées. La boucle externe (Algorithme 2) fait avancer la simulation dans le temps : elle advecte les nœuds du sillage, fait tourner la pale et met à jour les circulations émises. La boucle interne (Algorithme 1) détermine, à chaque pas de temps, la circulation portée par les pales.

C'est cette boucle interne qui fait l'objet du présent travail. Le théorème de Kutta-Joukowski impose que la circulation Γ_k de la k -ième section vérifie

$$\Gamma_k = f_k(\Gamma) := \frac{1}{2} c_k C_L(\alpha_k, P_k) \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|, \quad (1)$$

où c_k est la corde locale, C_L le coefficient de portance issu des polaires, α_k l'angle d'attaque et $\vec{u}_{\Pi_k}$ la vitesse relative projetée dans le plan du profil. La difficulté est que le membre de droite dépend lui-même de Γ : la vitesse en un point de la pale est induite, via la loi de Biot-Savart, par l'ensemble des filaments tourbillonnaires, y compris ceux que la pale vient d'émettre. En notant $\Gamma \in \mathbb{R}^{3n}$ le vecteur des circulations des $3n$ sections d'une éolienne tripale, la relation (1) s'écrit $\Gamma = f(\Gamma)$: il s'agit d'un problème de point fixe.

En pratique, ce point fixe est résolu par itérations successives de f , amorties par un facteur de relaxation $\eta_{\text{relax}} \in]0, 1]$:

$$\Gamma^{(p+1)} = \Gamma^{(p)} + \eta_{\text{relax}} \cdot (f(\Gamma^{(p)}) - \Gamma^{(p)}) . \quad (2)$$

C'est la méthode dite de *Picard relaxée*, celle qu'implémente SVEN et, plus généralement, la plupart des solveurs FVW. Elle pose deux difficultés d'ordre pratique. D'une part, il n'existe pas dans la littérature de critère permettant de garantir sa convergence, ni de choisir η_{relax} : ce paramètre est calibré empiriquement, configuration par configuration. Une valeur trop grande fait diverger l'algorithme, une valeur trop petite le fait converger inutilement lentement, voire l'empêche d'atteindre la tolérance demandée dans le nombre d'itérations alloué. D'autre part, cette calibration doit être refaite dès que l'on change de turbine, de conditions de vent ou de discrétisation, ce qui est peu satisfaisant pour un code de production.

Le stage étude et recherche de l'année dernière avait posé les bases d'un formalisme permettant d'aborder ces questions, mais dans un cadre restreint (éolienne monopale, vent uniforme et aligné avec l'axe du rotor, noyau de régularisation particulier). Cet objectif poursuit trois buts :

- (i) généraliser ce formalisme à une configuration réaliste, c'est-à-dire une éolienne multi-pales soumise à un vent quelconque ;
- (ii) en tirer un critère explicite de choix du facteur de relaxation, calculable à partir des grandeurs déjà disponibles dans le solveur ;
- (iii) évaluer l'intérêt d'une méthode de résolution alternative, la méthode de Newton, rendue accessible par le calcul analytique de la jacobienne de f .

3.1.2 Généralisation du formalisme à une éolienne multi-pales

Le point de départ a été de constater que le formalisme monopale se généralise sans modification structurelle : il suffit de concaténer les nœuds des trois pales dans un même vecteur pour se ramener au cas d'une pale unique comportant $3n$ sections au lieu de n . Les formules restent alors formellement identiques.

Cette concaténation a toutefois un effet de bord : elle crée des filaments fictifs, qui relieriaient le bout d'une pale au pied de la suivante et qui n'ont aucune existence physique. Un décalage d'indices, détaillé dans la Section I.3, permet de « sauter » ces filaments en leur imposant une circulation nulle. On obtient ainsi un formalisme qui traduit exactement ce que calcule la méthode FVW, tout en conservant les résultats théoriques établis l'année précédente.

Deux extensions accompagnent cette généralisation. D'abord, le formalisme obtenu ne fait aucune hypothèse sur le vent incident $\vec{U}_\infty$: il reste valable en présence de yaw ou d'instationnarité, alors que le cadre de l'année dernière supposait un vent uniforme, stationnaire et aligné avec l'axe de rotation. Il est également indépendant de la formule de régularisation retenue pour le noyau de Biot-Savart. Ensuite, l'expression de la jacobienne a pu être notablement simplifiée en exploitant une hypothèse supplémentaire, classique en aérodynamique de pale : seule la composante de la vitesse contenue dans le plan de la section contribue à la portance. Cette hypothèse d'écoulement bidimensionnel fait l'objet d'une vérification numérique dans la Section 3.2.2.

3.1.3 Les leviers théoriques mobilisés

L'ensemble des résultats mathématiques, énoncés et démontrés, figure dans l'annexe II. On se limite ici à ce qui est nécessaire pour comprendre les expériences numériques.

Le premier volet concerne **la jacobienne analytique**. La Proposition II.1 donne l'expression exacte des coefficients de la matrice jacobienne $J := d_\Gamma f$. Chaque coefficient se décompose en deux contributions : la première traduit la modification de la *norme* de la vitesse relative vue par la section, la seconde la modification de sa *direction*, donc de l'angle d'attaque, pondérée par la pente locale de la polaire $\partial C_L / \partial \alpha$.

Disposer de cette expression sous forme fermée présente deux avantages : elle s'évalue à partir de grandeurs géométriques déjà calculées par le solveur, sans les $3n$ évaluations supplémentaires de f qu'exigerait une approximation par différences finies, et elle donne accès aux valeurs propres de J , qui gouvernent la convergence de l'algorithme. C'est le résultat plus fondamental, les trois volets suivants se déduisant de celui-ci.

Le deuxième volet concerne **une majoration a priori**. La Proposition II.2 fournit une majoration de $|J_{ki}|$ indépendante de Γ , en remplaçant les contributions de la polaire par leur maximum sur l'ensemble des angles d'attaque possibles. On en déduit une matrice $\mathcal{K}$, purement géométrique, et le fait que f est lipschitzienne de constante contrôlée par $\mathcal{K}$ (Théorème II.1). Si $\rho(\mathcal{K}) < 1$, la convergence de l'algorithme de Picard est garantie. L'intérêt de ce résultat est qu'il s'évalue sans connaître la solution ; sa limite est qu'il repose sur une majoration potentiellement très pessimiste, ce que l'expérience n°1 permet de quantifier.

Le troisième volet consiste en **un critère du choix du facteur de relaxation**. En effet, la relaxation (2) revient à remplacer les valeurs propres λ_i de J par $1 + \eta_{\text{relax}}(\lambda_i - 1)$. Le Théorème II.3 en déduit un critère explicite : en posant

$$\kappa_i := \frac{2(1 - \text{Re}(\lambda_i))}{|\lambda_i - 1|^2}, \quad (3)$$

si toutes les valeurs propres vérifient $\text{Re}(\lambda_i) < 1$, alors tout $\eta_{\text{relax}} \in]0, \min_i \kappa_i[$ ramène le rayon spectral de l'itération relaxée sous 1, ce qui assure la convergence locale de l'algorithme (Corollaire II.3). Si en revanche certaines valeurs propres sont de part et d'autre de 1, aucun facteur de relaxation ne convient. Ce critère fournit donc une borne supérieure calculable pour η_{relax} , en remplacement d'une calibration empirique.

Enfin le dernier volet est **une méthode de résolution alternative**. Chercher un point fixe de f revient à chercher un zéro de $F(\Gamma) = \Gamma - f(\Gamma)$. Comme la jacobienne est connue analytiquement, on peut appliquer la méthode de Newton, qui consiste à résoudre à chaque itération le système linéaire

$$(I_{3n} - J(\Gamma^{(p)})) \cdot \Delta\Gamma^{(p)} = f(\Gamma^{(p)}) - \Gamma^{(p)}, \quad \Gamma^{(p+1)} = \Gamma^{(p)} + \Delta\Gamma^{(p)}, \quad (4)$$

puis à mettre à jour la circulation. La Section II.3 en donne le détail. Cette méthode converge quadratiquement au voisinage de la solution, mais chaque itération est plus coûteuse : il faut assembler la jacobienne et résoudre un système $3n \times 3n$. Elle exige de plus une initialisation suffisamment proche de la solution. L'arbitrage entre ces effets ne peut se trancher que numériquement, ce qui motive l'expérience n°2.

3.1.4 Mise en œuvre et protocole expérimental

Afin de confronter ce formalisme à un cas d'application concret, nous utilisons le solveur FVW open-source SVEN. Son code repose sur une approche orientée objet où chaque pale est une instance distincte ; la correspondance terme à terme entre les objets du code et les grandeurs mathématiques du formalisme est donnée dans la Section VII.2.

Trois ajouts ont été apportés au solveur : le calcul de la jacobienne analytique, un solveur de Newton utilisable en remplacement de l'itération de Picard relaxée, et une instrumentation permettant de récupérer à chaque pas de temps les indicateurs de convergence (valeurs propres, rayons spectraux, résidus, nombre d'itérations, temps d'exécution).

Chaque résultat théorique de la section précédente a été associé à un indicateur mesurable, de manière à pouvoir être confronté à la simulation. Le Table 4 récapitule cette articulation.

Résultat théorique	Indicateur mesuré	Où
Expression analytique de la jacobienne (Proposition II.1)	Écart τ entre la jacobienne analytique et une dérivée directionnelle par différences finies	Exp. n°1
Hypothèse d'écoulement bi-dimensionnel	Part de la vitesse hors du plan de la section	Exp. n°1
Majoration a priori par $\mathcal{K}$ (Proposition II.2)	Comparaison de $\rho(\mathcal{K})$ et de $\rho(J)$	Figure 7
Caractère lipschitzien de f (Théorème II.1)	Constante de Lipschitz empirique versus $\rho(J)$	Figure 8
Critère de relaxation κ_i (Théorème II.3)	Rayon spectral de l'itération relaxée ; borne $\min_i \kappa_i$	Figure 7, Figure 9
Convergence de Newton (Section II.3)	Historique des résidus, nombre d'itérations	Figure 10, Figure 11
Complexité comparée des solveurs (Section II.6)	Temps d'exécution empirique du solveur de point fixe	Exp. n°2

TABLE 4 – Articulation entre les résultats théoriques de l'annexe II et les indicateurs mesurés lors des expériences numériques.

3.2 Résultats

3.2.1 Cas d'étude

Les expériences portent sur l'éolienne New Mexico, présentée dans l'annexe IV, dans la configuration suivante : $TSR = 8$, yaw nul, $R_{hub} = 0.210$ m, $R = 2.25$ m, $\theta_{pitch} = -2.30^\circ$, $\rho = 1.198 \text{ kg m}^{-3}$ et $\Omega = 44.5 \text{ rad s}^{-1}$. Quatre discrétisations spatiales sont comparées, correspondant à $n \in \{5, 10, 20, 40\}$ sections par pale, ce qui permet d'observer l'effet du raffinement sur le conditionnement du problème.

Le calcul de la jacobienne requiert la pente des polaires $\partial C_L / \partial \alpha$. Ces polaires n'étant connues que sous forme tabulée, cette dérivée est évaluée par différences finies sur la table ; quelques exemples sont tracés dans la Figure 6. On y observe les fortes variations attendues au voisinage du décrochage.

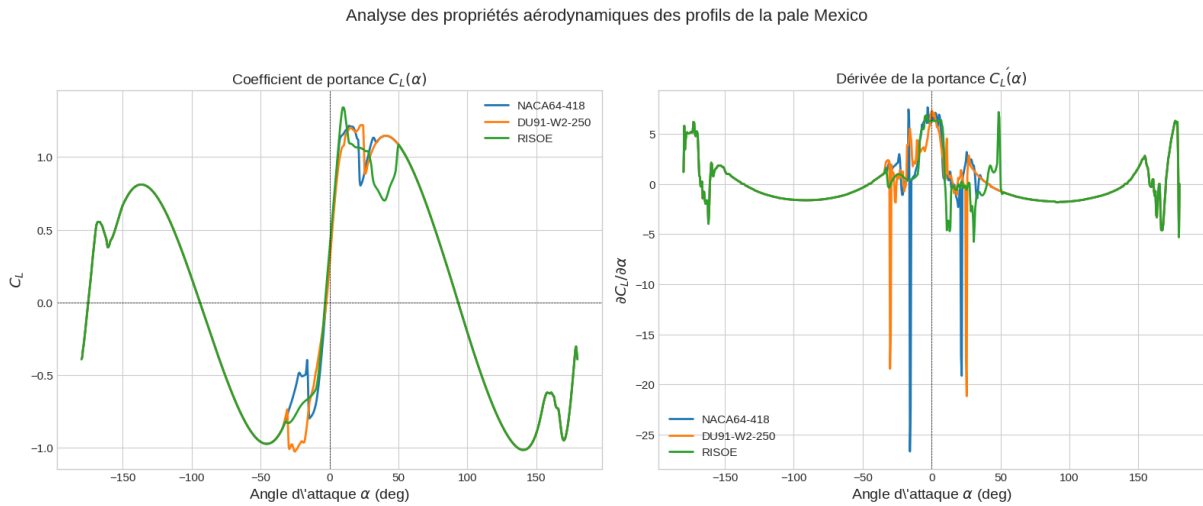


FIGURE 6 – Tracé de quelques polaires de New Mexico et de leur dérivée, calculée par différences finies.

3.2.2 Expérience n°1 : validation du formalisme et analyse de la convergence

Cette première expérience simule cinq tours de pale avec un pas angulaire de 10° , la résolution du point fixe étant assurée par la méthode de Picard relaxée avec la valeur par défaut $\eta_{relax} = 0,05$. Les indicateurs ont été enregistrés au tout premier pas de temps, qui constitue un « choc initial » puisque le sillage n'existe pas encore, ainsi que sur les deux derniers tours, en régime stabilisé.

Validation de la jacobienne analytique. À chaque pas de temps, on tire aléatoirement une direction d et on compare la dérivée directionnelle analytique à son approxima-

tion par différences finies centrées, en mesurant

$$\tau = \left\| \frac{f(\Gamma + \epsilon d) - f(\Gamma - \epsilon d)}{2\epsilon} - J \cdot d \right\|_{\infty}, \quad \epsilon = 10^{-3},$$

où Γ est la solution du point fixe. Sur l'ensemble de la simulation, τ vaut 10^{-3} en moyenne et 10^{-2} au maximum. L'expression analytique proposée est donc cohérente avec son approximation numérique, ce qui valide à la fois le calcul de la Proposition II.1 et son implémentation.

Validation de l'hypothèse bidimensionnelle. La part de la vitesse orientée selon l'axe d'envergure $\vec{N}_k \times \vec{T}_k$, c'est-à-dire hors du plan de la section, reste systématiquement inférieure à 6%. L'hypothèse d'écoulement bidimensionnel utilisée pour simplifier la jacobienne est donc raisonnable sur ce cas.

Qualité de la majoration a priori. La Figure 7 montre que la majoration par la matrice $\mathcal{K}$ est trop grossière pour être exploitable : le rayon spectral de la jacobienne de Picard pur¹⁵ (losanges noirs) varie entre 1 et 5 selon le pas de temps et la discrétisation, tandis que celui de $\mathcal{K}$ (carrés violets) varie entre 300 et 1100, soit deux ordres de grandeur d'écart. En remplaçant le majorant $\max_{\alpha} (|C_L| + |\partial C_L / \partial \alpha|)$ par la valeur effectivement prise à la solution, on construit une matrice $\mathcal{K}'$ (cercles) dont le rayon spectral retrouve le bon ordre de grandeur. Toute l'imprécision de la majoration est donc concentrée sur ce terme de polaire : la majoration uniforme sur $[-\pi, \pi]$ inclut des régimes, très au-delà du décrochage, que la pale ne rencontre jamais en fonctionnement nominal. Le critère $\rho(\mathcal{K}) < 1$ n'est donc pas exploitable en pratique, mais l'expérience indique précisément où se situe la difficulté. Il est également important de préciser que cet objectif de majoration est inutile puisqu'en pratique l'algorithme de Picard pur ne converge pas sans relaxation pour les cas de discrétisation usuelle ($n \geq 30$).

Pertinence du rayon spectral comme indicateur. En l'absence de relaxation, la Figure 8 montre que le rayon spectral de la jacobienne analytique constitue une bonne approximation de la constante de Lipschitz empirique de f pour la norme $\|\cdot\|_2$. Cela justifie de raisonner sur les valeurs propres pour analyser la convergence de l'algorithme.

Effet de la discrétisation sur la convergence. Les valeurs propres de la jacobienne à la solution se révèlent réelles négatives, donc de partie réelle inférieure à 1 : le Corollaire II.3 s'applique et garantit qu'il existe un facteur de relaxation assurant la convergence locale de l'algorithme. La Figure 9 en donne quelques tracés dans le plan complexe. Dès

15. Il s'agit de l'algorithme de Picard en l'absence de relaxation : $\eta_{\text{relax}} = 1$

Analyse de Stabilité : Influence du facteur de relaxation η

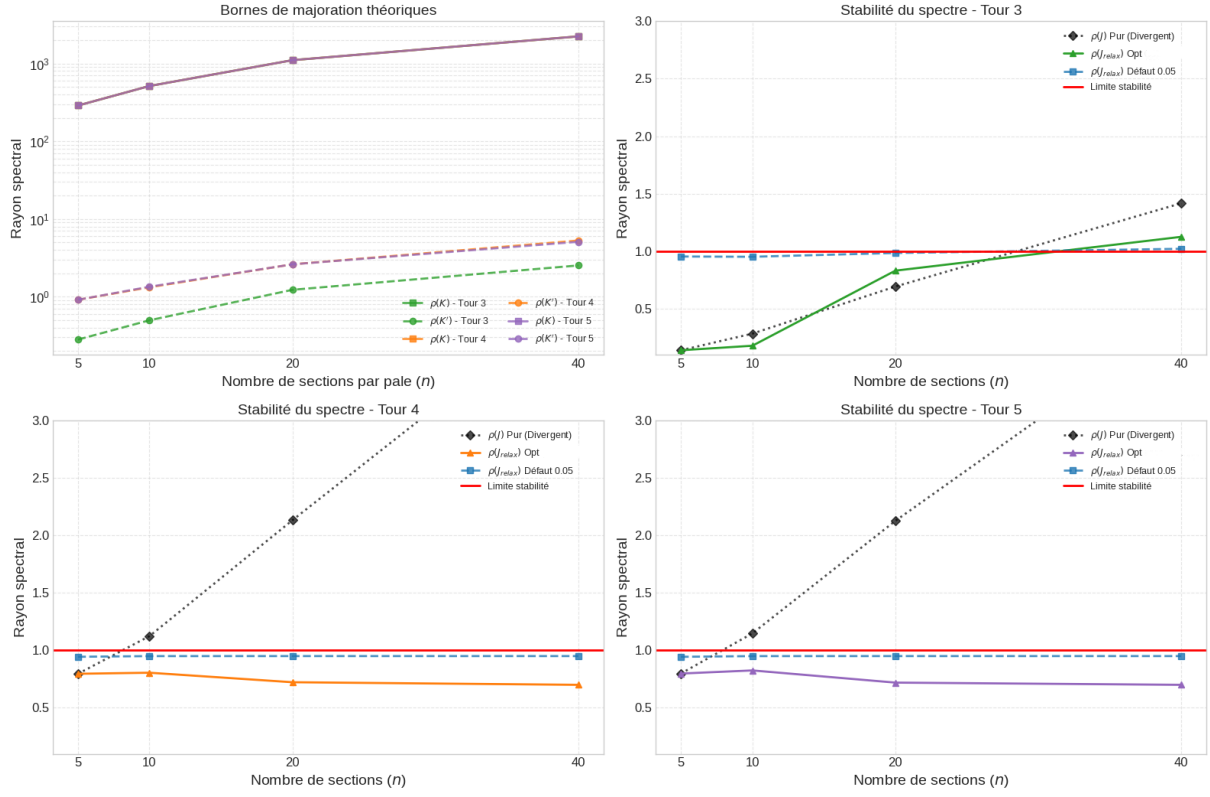


FIGURE 7 – Rayons spectraux de la jacobienne de f et des matrices de majoration $\mathcal{K}$ et $\mathcal{K}'$, au choc initial et en régime stabilisé, pour les quatre discrétisations.

Tableau de Bord : Régime Établi (Tours 3 à 5)

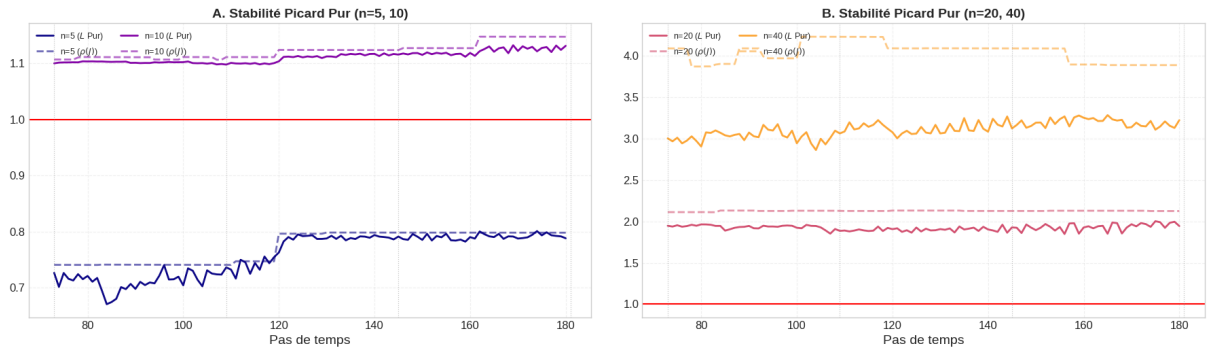


FIGURE 8 – Constantes de Lipschitz empiriques comparées aux rayons spectraux de la jacobienne J de f .

que ces valeurs propres sortent du cercle unité, l'algorithme de Picard pur cesse de converger, ce qui se produit à partir de $n \geq 10$. La Figure 7 confirme que la relaxation (carrés bleus et triangles) ramène le rayon spectral sous 1 dans la plupart des cas, les courbes notées « opt » correspondant au facteur choisi selon le Théorème II.3.

La borne théorique $\min_i \kappa_i$ se resserre nettement lorsque la pale est raffinée : elle vaut 1,11 pour $n = 5$, 0,93 pour $n = 10$, 0,63 pour $n = 20$ et 0,38 pour $n = 40$. Cette évolution est cohérente avec le comportement observé : pour $n = 5$, la borne dépasse 1, ce qui signifie qu'aucune relaxation n'est nécessaire et explique que Picard pur converge encore. Pour $n = 40$, il faut au contraire relaxer très fortement. Ce résultat a une conséquence pratique directe : le facteur de relaxation ne peut pas être considéré comme un réglage indépendant du maillage, et un réglage validé sur une discrétisation grossière n'est pas transposable à une discrétisation fine.

Comportement des solveurs. Les Figures 10 and 11 tracent l'historique des résidus. En régime stabilisé, la méthode de Newton atteint l'erreur limite de $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ en deux à trois itérations ; au premier pas de temps, où le point de départ est plus éloigné de la solution, il lui en faut entre cinq et onze selon la discrétisation. L'algorithme de Picard pur ne converge que pour $n = 5$, la divergence étant d'autant plus marquée que n est grand, et la relaxation permet de rétablir la convergence.

3.2.3 Expérience n°2 : coût de la résolution

La première expérience compare des nombres d'itérations ; la seconde s'intéresse au coût réel, qui est ce qui importe pour un utilisateur du solveur. Trois simulations de quinze tours ont été lancées avec $n = 40$: Picard relaxée à $\eta_{\text{relax}} = 0,05$, Picard relaxée à $\eta_{\text{relax}} = 0,3$, et Newton. Le nombre maximal d'itérations du solveur de point fixe est fixé à 20 et la tolérance visée à $1 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ pour la norme $\|f(\Gamma) - \Gamma\|_\infty$.

Le Picard fortement relaxé ($\eta_{\text{relax}} = 0,05$) n'atteint pas cette tolérance dans le budget d'itérations imparti. Le Picard faiblement relaxé ($\eta_{\text{relax}} = 0,3$) y parvient en dix itérations en moyenne, et la méthode de Newton en deux. On notera que la valeur 0,3 est cohérente avec la borne théorique $\min_i \kappa_i = 0,38$ obtenue pour $n = 40$, alors que la valeur par défaut 0,05 est très en deçà : le critère de l'Equation (3) aurait permis d'identifier ce réglage sans tâtonnement.

La Figure 12 montre en revanche que le gain en nombre d'itérations ne se traduit pas en gain de temps : bien que Newton demande cinq fois moins d'itérations que Picard, les temps d'exécution empiriques des deux algorithmes restent comparables, l'assemblage de la jacobienne et la résolution du système linéaire coûtant sensiblement plus qu'une simple évaluation de f . Ce constat rejoint l'analyse de complexité théorique de la Section II.6.

Spectre de Stabilité évalué en Γ_{sol} (Solution de Picard Relaxé)
Tour 4 (Pas 126)

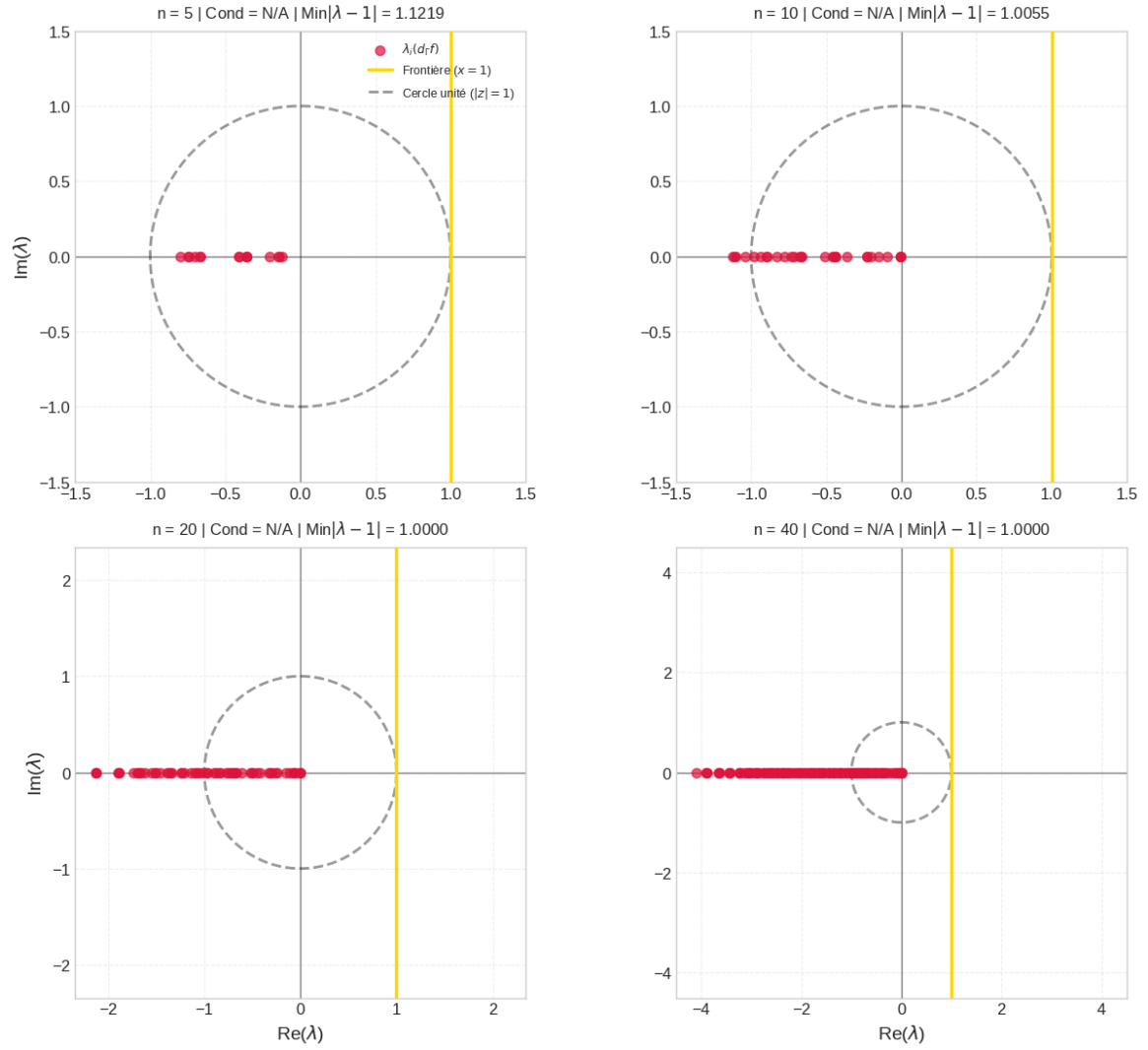


FIGURE 9 – Valeurs propres de la jacobienne de f au point fixe, pour le pas de temps 126.

Convergence des itérations internes - Choc Initial (t=0) (Pas 1)

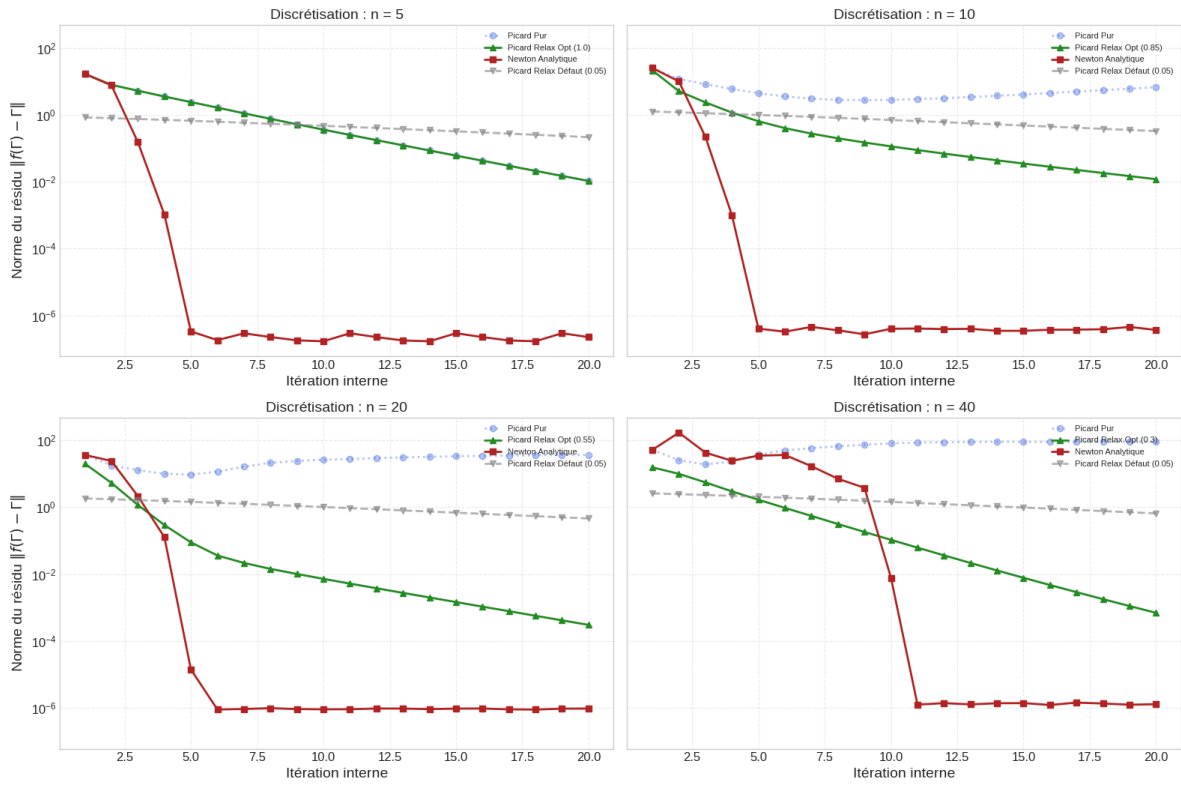


FIGURE 10 – Résidus au premier pas de temps (choc initial).

Convergence des itérations internes - Tour 5 (Stabilisé) (Pas 180)

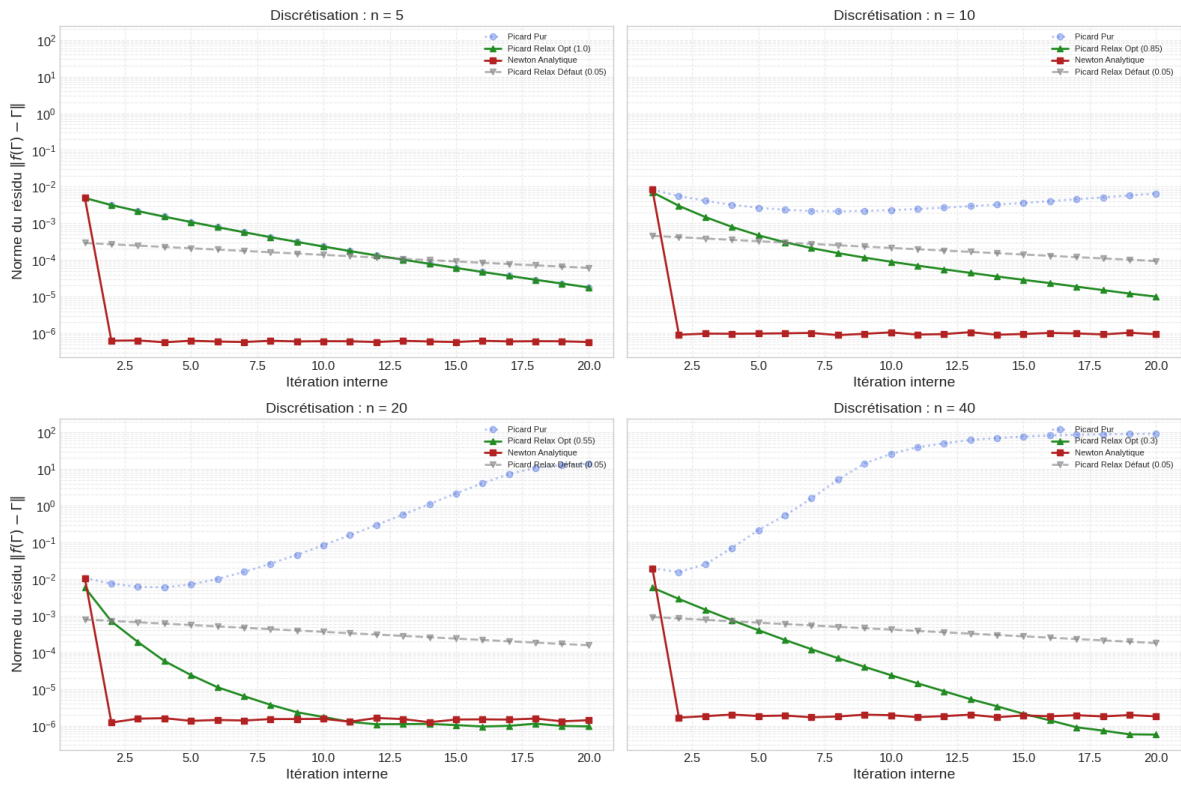


FIGURE 11 – Résidus au dernier pas de temps (régime stabilisé).

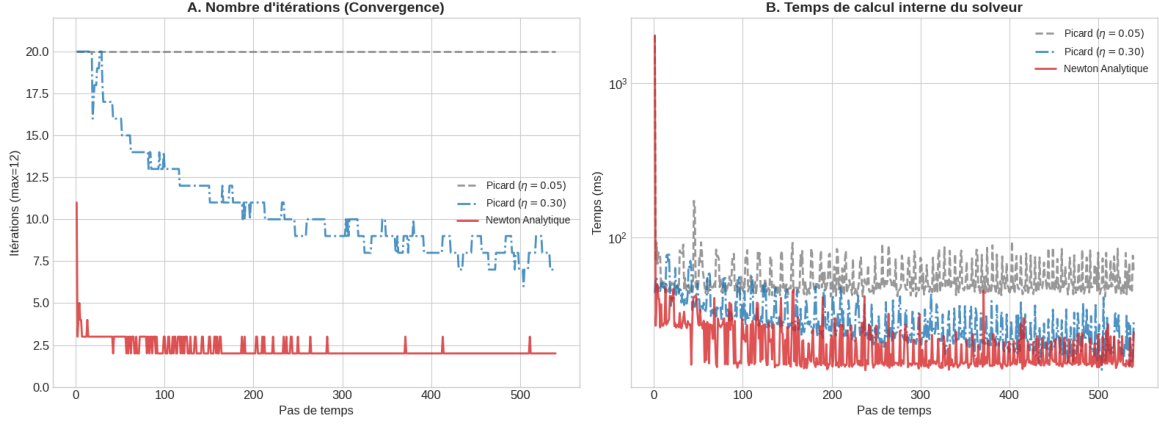


FIGURE 12 – Nombre d’itérations et temps d’exécution empirique de l’algorithme de point fixe au cours de la simulation.

3.3 Bilan et travail futur

Le formalisme développé dans la Section I.3 a été généralisé aux éoliennes multi-pales et à des conditions de vent quelconques, et confronté avec succès à un solveur existant : la jacobienne analytique concorde avec son approximation par différences finies, et l’hypothèse d’écoulement bidimensionnel sur laquelle repose sa forme simplifiée est vérifiée sur le cas testé.

Ce formalisme apporte deux éléments à la compréhension de l’algorithme de point fixe de la méthode FVW. Le premier est un diagnostic : les valeurs propres de la jacobienne expliquent quantitativement pourquoi la convergence se dégrade lorsque l’on raffine la discrétisation spatiale, phénomène jusqu’ici constaté empiriquement. Le second est un critère explicite de choix du facteur de relaxation. Sur les cas testés, ce critère varie peu au cours d’une simulation à conditions de vent et discrétisation fixées, ce qui suggère qu’il peut être évalué une seule fois en début de calcul ; il fournit alors une borne objective, là où la pratique courante consiste à calibrer η_{relax} par essais successifs.

Les résultats concernant la méthode de Newton doivent en revanche être interprétés avec prudence. Elle converge effectivement en un nombre d’itérations nettement plus faible, mais sans gain de temps de calcul sur les configurations étudiées, et elle nécessite une initialisation proche de la solution, faute de quoi elle ne converge pas. Nous n’avons pas établi qu’elle soit préférable à la méthode de Picard relaxée : les expériences menées ne permettent que de constater que les deux approches sont de coût comparable ici. L’enjeu est d’autant plus limité que, comme le montre la Section II.6, le solveur de point fixe ne représente qu’une fraction marginale du coût total d’une simulation FVW, largement dominé par l’advection du sillage.

Plusieurs directions restent ouvertes. La question de l'initialisation de la méthode de Newton n'a pas été traitée, alors qu'elle détermine son utilisabilité ; les nombreuses variantes existantes (Newton amorti, quasi-Newton, jacobienne gelée sur plusieurs pas de temps) pourraient par ailleurs modifier l'arbitrage coût/robustesse. Il serait également instructif de chercher des conditions de vent ou des paramètres de discrétisation pour lesquels l'une des deux méthodes converge sans que l'autre y parvienne, ce qui délimiterait leurs domaines d'emploi respectifs. Enfin, l'influence des conditions de fonctionnement sur la borne théorique $\min_i \kappa_i$ mériterait d'être étudiée systématiquement, et cette borne confrontée au facteur de relaxation maximal observé empiriquement : c'est la comparaison qui permettrait de statuer sur le caractère effectivement opérationnel du critère.

4 Retour d'expérience

4.1 Difficultés rencontrées

Les normes et les certifications d'éoliennes ne sont pas libres d'accès puisque gérées par des organismes privés qui vendent leur documentation à un prix relativement élevé¹⁶ contrairement au monde du bâtiment et du génie civil où celle-ci est généralement gratuite et en libre accès¹⁷. Les données sur les géométries d'éoliennes et les profils aérodynamiques des constructeurs sont elles aussi payantes et rarement accessibles. Pour contourner cette inégalité, des organismes de recherche académique ont mené la campagne New Mexico et ils ont également publié les caractéristiques de quelques éoliennes fictives¹⁸. Sauf que le nombre de données reste limité pour des projets d'apprentissage profond. J'ai pu constater sur le terrain, cette différence d'accès aux ressources qui a été une source de frustration tout au long de ce stage.

L'ordinateur commandé par l'Inria pour ce stage n'est arrivé que tardivement. En attendant, nous avons dû utiliser les ordinateurs personnels d'Arthur ainsi que les ressources gratuites de Google Colab, faute de disposer moi-même d'une machine équipée d'une carte graphique Nvidia. Ces ressources gratuites se sont toutefois révélées peu adaptées : leur durée de session n'est pas garantie, de l'ordre de quatre heures en moyenne, ce qui posait problème dès qu'une campagne de simulations nécessitait plusieurs jours de calcul continu. Cette dépendance a été renforcée par le monopole de fait que Nvidia exerce sur

16. Par exemple pour la série de normes IEC 61400, le prix est en moyenne de 800 euros par document technique.

17. C'est par exemple le cas des eurocodes. Il faut toutefois nuancer, puisque par exemple le CSTB (Centre Scientifique et Technique du Bâtiment) facture également ses DTU (Documents Techniques Unifiés) et son guide eurocodes. Par contre, ses ATec (avis techniques) sont consultables gratuitement.

18. C'est par exemple le cas de l'éolienne IEA Wind 15 MW qui avait été étudiée dans mon stage étude et recherche. Cette éolienne est fictive, ses caractéristiques ayant été produites par le NREL (National Renewable Energy Laboratory) des États-Unis.

CUDA, le langage qui permet d'exploiter les processeurs graphiques pour l'apprentissage automatique comme pour des codes accélérés par GPU tels que SVEN, et qui impose de fait de s'équiper de son matériel pour disposer d'un environnement de calcul performant.

Enfin, la soutenance de stage et la rédaction du rapport ont lieu bien avant la fin effective du stage, ce qui n'a pas permis de prendre autant de recul que je l'aurais souhaité sur les résultats obtenus, ni de me concentrer pleinement sur le travail de recherche jusqu'au bout. Les parties consacrées aux résultats et au travail futur sont par nature amenées à évoluer, et il n'est pas exclu qu'elles ne reflètent plus exactement l'état des travaux au moment de la soutenance. Il a d'ailleurs été difficile d'arbitrer, dans la rédaction, entre présenter les résultats les plus récents, encore provisoires, et présenter des résultats plus anciens, un peu moins intéressants mais mieux établis.

4.2 Apports personnels et professionnels

Contrairement au stage de l'année dernière, effectué seul, le volet travail d'équipe a été bien plus présent cette année. Avec Arthur, nos échanges ont relevé aussi bien de la collaboration, au sens d'un enrichissement mutuel des idées, que de la coopération, au sens d'une répartition des tâches destinée à augmenter notre productivité collective. Les cours de management ainsi que de communication visuelle et écrite suivis à l'EIVP m'ont été très utiles pour aborder cette dimension de l'expérience professionnelle.

Ce stage m'a par ailleurs beaucoup apporté sur le plan scientifique, certaines connaissances étant totalement nouvelles et d'autres ayant déjà été entrevues au cours de ma formation. Quelques notions de mécanique des fluides, abordées dans le cours et projet eau potable du semestre 8 et dans le cours d'acoustique du semestre 7, m'avaient donné une première familiarité avec le sujet. La programmation orientée objet en Python, découverte pour la première fois à l'EIVP dans le cours d'algorithmique et de programmation du semestre 5, a en revanche constitué un apport essentiel : je ne codais jusque-là qu'avec des tableaux `numpy`, et ce stage a été l'occasion de m'approprier ce paradigme, aussi bien pour développer les réseaux de neurones de l'objectif A que pour prendre en main le code `sven`. Le projet data du semestre 6, au cours duquel nous avons testé des modèles statistiques pour prédire le taux d'adoption du véhicule électrique dans les années à venir, ainsi que le cours de probabilités et statistiques du semestre 5 à l'EIVP, m'ont également été très utiles. Ce stage m'a donné l'occasion d'approfondir et de mettre en pratique l'ensemble de ces connaissances, tout en en développant de nouvelles.

5 Conclusion

Ce travail de fin d'études portait sur la modélisation des efforts aérodynamiques s'appliquant sur les pales d'éoliennes, abordée par deux voies complémentaires : l'augmentation de fidélité de la théorie BEM par apprentissage statistique d'une part, l'analyse numérique de la méthode Free Vortex Wake d'autre part. Ces deux objectifs répondaient à une même problématique : si la méthode FVW est nettement plus précise que la BEM, son coût de calcul et le caractère expérimental de certains de ses réglages la rendent difficilement accessible pour une utilisation courante en conception.

L'objectif A, mené en binôme avec Arthur, a conduit à une famille de cinquante-deux modèles de substitution paramétrée par cinq axes de conception. Ces modèles ont été classés selon six épreuves. Sur l'éolienne New Mexico et pour un domaine de fonctionnement couvrant $\text{TSR} \in [4, 12]$ et $\gamma \in [-30^\circ, 30^\circ]$, les meilleurs modèles divisent par trois à quatre l'erreur locale de la BEM par rapport à la référence FVW, et par plus de dix son erreur sur les coefficients intégrés, pour un coût d'inférence du même ordre que celui de la BEM à savoir cent fois inférieur à celui d'une simulation **sven**. Le compromis visé est donc atteint et le principe même d'une correction par apprentissage se trouve validé. La compétition a permis de souligner quelques régularités intéressantes : les forces constituent une meilleure variable cible que les vitesses, la topologie convolutive ne semble finalement pas profiter comme attendu des corrélations spatiales. L'utilisation de la BEM en entrée ou d'un auto-encodeur semble surtout être utile pour compenser les difficultés rencontrées avec certaines architectures, sans toutefois permettre d'atteindre les meilleures performances. Il faut cependant être prudent concernant l'interprétation des résultats : en effet, ces derniers portent sur une turbine unique, dans un cadre volontairement simplifié, et rien ne garantit qu'ils puissent être généralisés à d'autres géométries.

L'objectif B, mené individuellement, a permis d'étendre le formalisme vectoriel développé l'année dernière à une éolienne multi-pales et à différentes conditions de vent. Les résultats obtenus ont ensuite été comparés avec succès à ceux du solveur SVEN : la jacobienne analytique est en accord avec son approximation par différences finies. De plus, l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel, utilisée pour obtenir sa forme simplifiée, est bien vérifiée sur le cas étudié. Deux apports en ressortent. Le premier concerne le diagnostic : l'étude des valeurs propres de la jacobienne permet d'expliquer quantitativement pourquoi la convergence se dégrade lorsque la discrétisation est affinée. C'est un phénomène qui avait été jusqu'à présent été observé sans véritable explication. Le second est un critère explicite de choix du facteur de relaxation, calculable à partir des grandeurs déjà disponibles dans le solveur, qui vient remplacer une calibration empirique menée jusqu'ici par essais successifs. La méthode de Newton, rendue accessible par le calcul analytique

de la jacobienne, converge en un nombre d'itérations nettement plus faible mais sans gain de temps sur les configurations étudiées ; l'enjeu reste au demeurant limité, l'analyse de complexité montrant que le solveur de point fixe ne représente qu'une fraction marginale du coût total d'une simulation, largement dominé par l'advection du sillage.

Les deux objectifs n'étaient pas indépendants : c'est le travail conduit sur la FVW qui a permis de produire, d'instrumenter et de valider les simulations haute fidélité constituant les données d'entraînement des modèles de l'objectif A.

Plusieurs directions restent ouvertes. Trois études sont engagées et seront achevées après le rendu de ce rapport : l'influence du volume de données d'entraînement, l'effet de la variante de correction BEM fournie en entrée, et la sensibilité spatiale des modèles, cette dernière étant la plus directement liée à la motivation physique du travail. À plus long terme, l'ambition est de généraliser les modèles à une géométrie de pale quelconque, condition essentielle pour pouvoir publier ces résultats dans une revue scientifique. D'ici là, les conférences CFM 2027 puis TORQUE 2028 semblent être les plus pertinentes pour valoriser ces travaux. Concernant l'objectif B, la suite du travail consistera à mettre en place la méthode Newton et ses variantes (Newton amortie, quasi-Newton) puis étudier l'influence des conditions de fonctionnement sur la borne théorique.

Sur le plan personnel, ce stage aura été le plus formateur de mon parcours. Il m'a permis d'approfondir des connaissances entrevues à l'EIVP en mécanique des fluides, en probabilités et statistiques et en programmation, tout en construisant de nouvelles en aérodynamique, en analyse numérique et en apprentissage profond. Il m'a aussi appris ce que signifie travailler en équipe sur un sujet de recherche : avec Arthur, dans un rapport de collaboration autant que de coopération ; avec Julien Salomon, dont l'encadrement m'accompagne depuis deux ans ; avec les équipes de l'IFPEN, dont les retours réguliers m'ont confronté aux exigences propres à la recherche industrielle. J'y ai découvert, avec les difficultés d'accès aux données et l'attente d'une machine de calcul, que le travail de recherche se heurte aussi à des contraintes très matérielles.

Ce stage a surtout confirmé une ambition. Le goût pour la formulation d'un problème, la patience qu'exige une démonstration, la satisfaction de voir un résultat théorique se vérifier dans une simulation, et le plaisir des échanges scientifiques que j'ai eus tout au long de ces mois m'ont convaincu que c'est ce métier que je veux exercer. Je souhaite donc préparer un doctorat et devenir chercheur, une fois que j'aurai rempli mes engagements envers la Ville de Paris en tant qu'ingénieur. Ces années d'exercice pratique ne me paraissent d'ailleurs pas éloignées de cet objectif : elles me permettront de me confronter à des problèmes concrets d'ingénierie urbaine et d'enrichir mon parcours.

Références

- [Allgeyer et al., 2019] Allgeyer, S., Bristeau, M.-O., Froger, D., Hamouda, R., Jauzein, V., Mangeney, A., Sainte-Marie, J., Souillé, F., and Vallée, M. (2019). Numerical approximation of the 3d hydrostatic Navier-Stokes system with free surface. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 53(6).
- [Audusse et al., 2012] Audusse, E., Chalons, C., Delestre, O., Goutal, N., Jodeau, M., Sainte-Marie, J., Giesselmann, J., and Sadaka, G. (2012). Sediment transport modelling : relaxation schemes for Saint-Venant - Exner and three layer models. *ESAIM : Proceedings*, 38 :78–98.
- [Bernard et al., 2025] Bernard, O., Lu, L.-D., Sainte-Marie, J., and Salomon, J. (2025). Topography optimization for enhancing microalgal growth in raceway ponds. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 63(4) :2451–2471.
- [Blondel et al., 2024] Blondel, F., Joulin, P.-A., and Guern, C. L. (2024). Towards vortex-based wind turbine design using gpus and wake accommodation. *Journal of Physics : Conference Series*, 2767(5) :052016.
- [Boorsma et al., 2018] Boorsma, K., Schepers, J. G., Gomez-Iradi, S., Herráez, I., Lutz, T., Weihing, P., Oggiano, L., Pirrung, G. R., Madsen, H. A., Shen, W. Z., Rahimi, H. R., and Schaffarczyk, P. (2018). Final report of iea wind task 29 mexnext (phase 3). Technical Report ECN-E-18-003, Energy Research Centre of the Netherlands (ECN), part of TNO. IEA TCP Wind Task 29 Mexnext-III final report.
- [Branlard, 2017] Branlard, E. (2017). *Wind Turbine Aerodynamics and Vorticity-Based Methods : Fundamentals and Recent Applications*, volume 7 of *Research Topics in Wind Energy*. Springer International Publishing, Cham.
- [Buhl, 2005] Buhl, Jr, M. L. (2005). New empirical relationship between thrust coefficient and induction factor for the turbulent windmill state. Technical report, National Renewable Energy Laboratory (NREL), Golden, CO.
- [Burton, 2001] Burton, T., editor (2001). *Wind energy : handbook*. J. Wiley, Chichester ; New York.
- [Dedieu, 2006] Dedieu, J.-P. (2006). *Points fixes, zéros et la méthode de Newton*. Springer, Paris.
- [Godlewski et al., 2018] Godlewski, E., Parisot, M., Sainte-Marie, J., and Wahl, F. (2018). Congested shallow water model : roof modelling in free surface flow. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 52(5) :1679 – 1707.
- [Hammond et al., 2020] Hammond, J. K., Chen, R., and Mallet, V. (2020). Meta-modeling of a simulation chain for urban air quality. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 7.

- [Joukowski, 1906] Joukowski, N. E. (1906). Sur les tourbillons adjoints. *Travaux de la Section Physique de la Société Impériale des Amis des Sciences Naturelles*, 13(2).
- [Kutta, 1902] Kutta, M. W. (1902). Auftriebskräfte in strömenden flüssigkeiten. *Illustrierte Aeronautische Mitteilungen*, 6 :133.
- [Le Guern, 2024] Le Guern, C. (2024). *Modélisation de l'aéro-élasticité en grandes transformations par un couplage partitionné : application aux grandes éoliennes*. Thèse de doctorat en mathématiques appliquées et calcul scientifique, Université de Bordeaux, Bordeaux, France. Thèse préparée à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux en partenariat avec IFP Énergies nouvelles, sous la direction de Michel Bergmann. Soutenue le 6 décembre 2024.
- [Ledoux et al., 2021] Ledoux, J., Rizzo, S., and Salomon, J. (2021). Analysis of the blade element momentum theory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 81(6) :2596–2621.
- [Lesieur et al., 2020] Lesieur, A., Aumond, P., Mallet, V., and Can, A. (2020). Meta-modeling for urban noise mapping. *Journal of the Acoustical Society of America*, 148(6) :3,671–3,681.
- [Manwell et al., 2009] Manwell, J. F., McGowan, J. G., and Rogers, A. L. (2009). *Wind energy explained : theory, design and application*. Wiley, Chichester, 2nd ed edition.
- [Ning, 2014] Ning, S. A. (2014). A simple solution method for the blade element momentum equations with guaranteed convergence. *Wind Energy*, 17(9) :1327–1345.
- [Pitt and Peters, 1981] Pitt, D. and Peters, D. (1981). Theoretical prediction of dynamic-inflow derivatives. *Vertica*, 5.
- [Principia and IFP Energies nouvelles,] Principia and IFP Energies nouvelles. *DeepLines Wind Version 5.9 : User Documentation*. Principia and IFP Energies nouvelles (IFPEN). Documentation utilisateur en ligne, version 5.9, consultée le 23 juillet 2026.
- [Quarteroni et al., 2007] Quarteroni, A., Sacco, R., and Saleri, F. (2007). *Numerical Mathematics*, volume 37 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer.
- [Shaler et al., 2020] Shaler, K., Branlard, E., and Platt, A. (2020). OLAF User's Guide and Theory Manual. Technical Report NREL/TP-5000-75959, National Renewable Energy Laboratory, Golden, CO.
- [Snel et al., 2007] Snel, H., Schepers, J., and Montgomerie, B. (2007). The MEXICO project (Model Experiment in Controlled Conditions) : The database and first results of data processing and interpretation. *Journal of Physics : Conference Series*, 75 :012014.
- [Van Garrel, 2003] Van Garrel, A. (2003). *Development of a wind turbine aerodynamics simulation module*. Energy research Centre of the Netherlands ECN Petten, The Netherlands.

I Description de la méthode FVW

Cette annexe est un extrait de mon rapport de stage étude et recherche.

I.1 Les lois de l'aérodynamique

Dans ce rapport de stage, l'opération $\times$ désigne le produit vectoriel. La vorticité $\vec{\omega}$ est une grandeur en s^{-1} définie comme le rotationnel du champ de vitesse $\vec{u}$:

$$\vec{\omega} := \nabla \times \vec{u}. \quad (5)$$

Elle représente localement la tendance d'un fluide à tourner autour d'un axe.

Pour un fluide incompressible, homogène et sans forces non conservatrices, l'équation de transport de la vorticité connue également sous le nom d'équation de Helmholtz, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u} + \nu \Delta \vec{\omega}, \quad (6)$$

où :

- ν est la viscosité cinématique du fluide en $m^2 s^{-1}$ (dans notre cas l'air),
- $(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{\omega}$ est un terme de convection,
- $(\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{u}$ est un terme d'étirement des vortex,
- $\nu \Delta \vec{\omega}$ est un terme de diffusion.

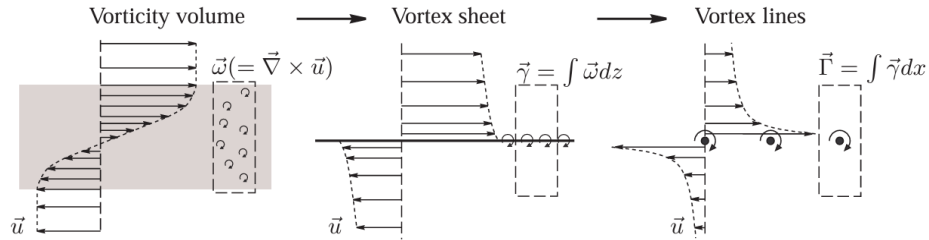


FIGURE 13 – Réduction d'une vorticité 3D   une circulation 1D, figure tirée de [Van Garrel, 2003].

Dans le cas de la méthode FVW, le sillage est discr t s  en éléments tourbillonnaires et plus précisément en filaments qui portent une circulation Γ en $m^2 s^{-1}$ ( quivalent 1D de la vorticité). Cette réduction de dimension est illustrée dans la Figure 13.

On adopte une description lagrangienne. Les marqueurs lagrangiens sont des points de contrôle aux extrémités de chaque filament que nous appellerons wake nodes (nœuds du sillage). Ils sont représentés en noir dans la Figure 14. Chaque filament donne une contribution au champ de vitesse des marqueurs lagrangiens via la loi de Biot-Savart¹⁹ :

¹⁹. Le nom de cette formule provient de l'électromagnétisme.

$$\vec{u}_{\text{ind}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|)(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|(|\vec{r}_1||\vec{r}_2| + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)}, \quad (7)$$

où $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont les vecteurs depuis les extrémités du filament vers le point considéré comme dans la Figure 14.

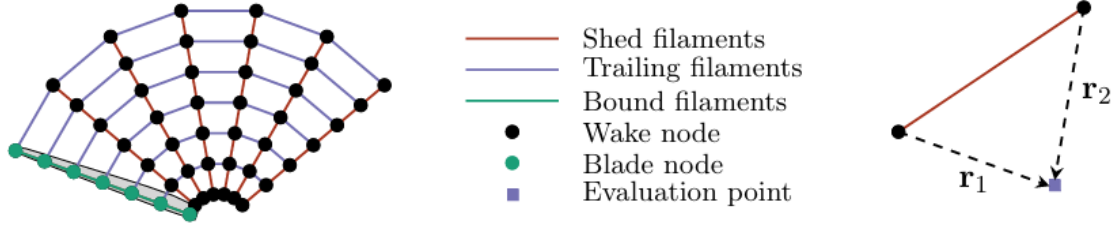


FIGURE 14 – Représentation schématique d'un sillage et notations pour la formule de Biot-Savart, figure tirée de [Blondel et al., 2024].

Le champ de vitesse déplace les filaments dans l'espace via l'équation d'advection :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u} := \vec{u}_{\infty} + \vec{u}_{\text{geo}} + \vec{u}_{\text{ind}}, \quad (8)$$

où :

- $\vec{x}$ est la position du filament,
- $\vec{u}_{\infty}$ est la vitesse de l'écoulement incident (freestream),
- $\vec{u}_{\text{geo}}$ la vitesse géométrique (solides en mouvement, vitesses d'entraînement, etc.),
- $\vec{u}_{\text{ind}}$ est la vitesse induite par tous les autres filaments (via la loi de Biot-Savart),
- $\vec{u}$ est la vitesse relative au profil (vent incident + vitesse géométrique + vitesse induite).

On considère une pale d'éolienne. Elle est discrétisée en sections ou panneaux, qui possèdent chacun une lifting-line (ligne portante), un leading edge (bord d'attaque) et un trailing edge (bord de fuite). La géométrie d'une section de pale est illustrée dans la Figure 15.

La lifting-line est composée de bound filaments (filaments liés) et de blade nodes (nœuds de pale). Ils sont représentés respectivement par des segments et des points verts dans la Figure 14. La corde que l'on notera c est définie comme la distance entre le leading edge et le trailing edge. La lifting-line est située au quart de corde. On notera les vecteurs unitaires suivant : $\vec{T}$ tangent à la corde, $\vec{N}$, normal à la pale et $\hat{e}_b$ tangent à la lifting-line. La vitesse géométrique $\vec{u}_{\text{geo}}$ des bound filaments correspond à la vitesse de rotation de la pale tandis qu'elle est nulle pour les filaments libres du sillage.

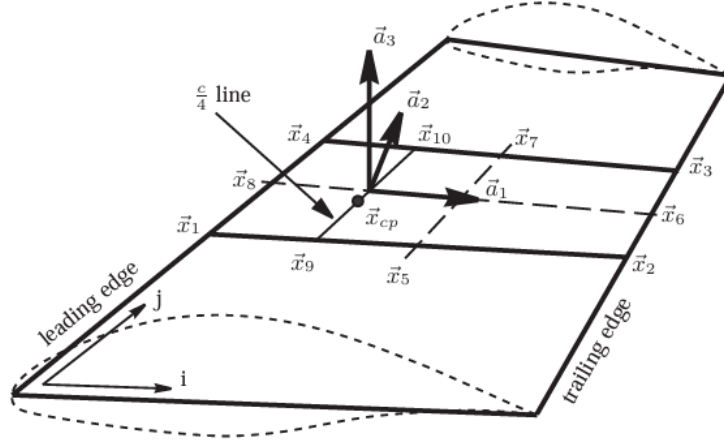


FIGURE 15 – Géométrie d'une section de pale, figure tirée de [Van Garrel, 2003], ici $\vec{N} = \vec{a}_3$ et $\vec{T} = \vec{a}_1$.

Le théorème de Kutta-Joukowski d'après [Kutta, 1902] et [Joukowski, 1906], stipule qu'en notant ρ la masse volumique de l'air, chaque section de pale est soumise à une force de portance (lift force) par unité de longueur, associée à une circulation liée Γ_b (bound circulation) sur la lifting-line²⁰.

On note $\Pi := \text{Vect}(\vec{N} \times \vec{T})^\perp$ le plan de la section locale (ou plan du profil), défini par les vecteurs unitaires tangentiel $\vec{T}$ et normal $\vec{N}$. En faisant l'hypothèse que le segment tourbillonnaire est parfaitement orthogonal à ce plan (hypothèse d'écoulement 2D), la portance scalaire L issue du théorème de Kutta-Joukowski se simplifie et ne dépend plus que de $\vec{u}_\Pi$, la projection orthogonale de la vitesse totale $\vec{u}$ sur le plan Π :

$$L = \rho \cdot \Gamma_b \cdot \|\vec{u}_\Pi\|. \quad (9)$$

Cette équation peut se réécrire grâce à la théorie de l'élément de pale (BEM), qui stipule que la portance par unité de longueur issue des polaires 2D s'exprime par $L = \frac{1}{2}\rho \cdot c \cdot C_L(\alpha)\|\vec{u}_\Pi\|^2$. En égalant ces deux expressions, on obtient la formulation de la circulation liée Γ_b :

$$\Gamma_b = \frac{1}{2} \cdot C_L(\alpha) \cdot c \cdot \|\vec{u}_\Pi\|, \quad (10)$$

où :

- c est la corde locale en m,
- $\vec{u}_\Pi$ est la vitesse projetée sur le plan Π , de norme $\|\vec{u}_\Pi\| = \sqrt{(\vec{u} \cdot \vec{T})^2 + (\vec{u} \cdot \vec{N})^2}$,
- α est l'angle d'attaque local défini dans le plan Π par $\alpha = \arctan\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{N}}{\vec{u} \cdot \vec{T}}\right)$,

20. On appelle points de Kutta les points de la lifting-line où on applique le théorème de Kutta-Joukowski. En pratique, ils sont au milieu des bound filaments comme sur la Figure 15 où ils sont notés $\vec{x}_{cp}$ pour control points.

- $C_L(\alpha)$ est le lift coefficient (coefficient de portance) sans unité de la section considérée.

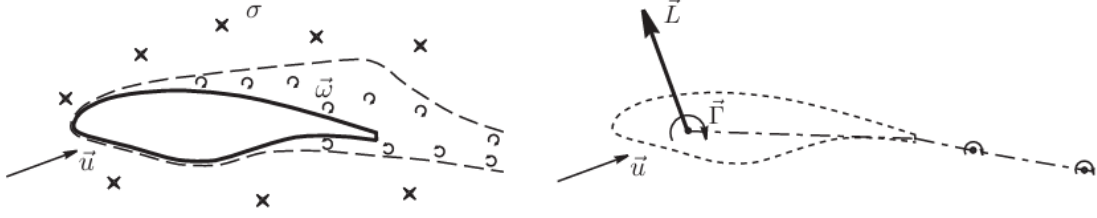


FIGURE 16 – Représentation de la force de portance $\vec{L}$, figure tirée de [Van Garrel, 2003].

L'angle d'attaque est l'angle formé entre la corde locale et la vitesse relative au profil.

Chaque profil a un lift coefficient propre, il est mesuré en laboratoire grâce à une soufflerie et on dispose ainsi de polaires pour le calculer.

Dans un fluide idéal (incompressible et sans viscosité), le théorème de Kelvin stipule que :

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0. \quad (11)$$

Ce principe garantit que la circulation initialement présente sur les pales se retrouve dans le sillage libre sous forme de vortex comme illustrée dans la Figure 17. Ceci entraîne que la structure du sillage est formée par deux types de filaments tourbillonnaires, associés à la variation de la circulation $\Gamma(x, t)$:

- Une variation temporelle $\partial\Gamma(x, t)/\partial t$ génère un filament shed (filament détaché).
- Une variation spatiale $\partial\Gamma(x, t)/\partial x$ génère un filament trailing (filament traînant).

Ces filaments sont modélisés comme des segments porteurs de circulation constante reliant les wake nodes. Ils sont représentés en rouge et en bleu dans la Figure 14. Leur circulation s'écrit :

$$\Gamma_{\text{shed}}(x, t) := \frac{\partial\Gamma(x, t)}{\partial t} \cdot \Delta t = \Gamma(x, t) - \Gamma(x, t - \Delta t), \quad \Gamma_{\text{trailing}}(x, t) := \frac{\partial\Gamma(x, t)}{\partial x} \cdot \Delta x = \Gamma(x, t) - \Gamma(x - \Delta x, t)$$

Au cours du temps de nouveaux filaments sont donc émis depuis le trailing edge de la pale.

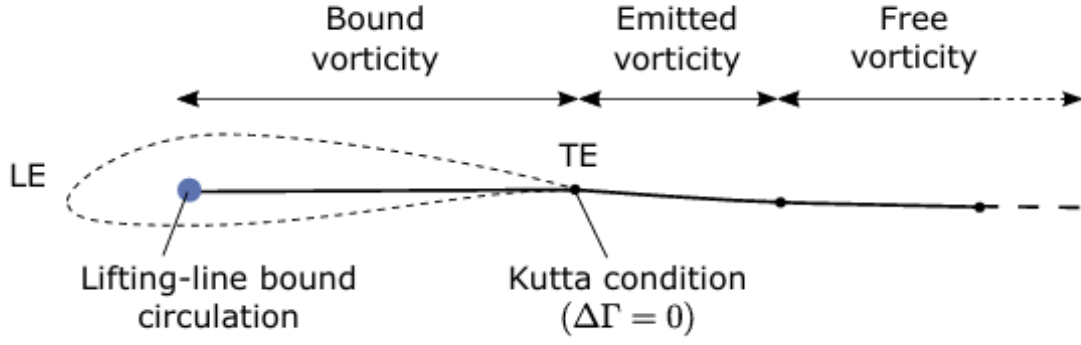


FIGURE 17 – Schéma des vortex liés et des vortex libres, figure tirée de [Shaler et al., 2020].

I.2 Algorithme Numérique

L'algorithme numérique repose sur la discrétisation des équations précédentes et leur résolution via une méthode de point fixe. L'algorithme de point fixe²¹ permet d'obtenir la circulation Γ_b sur la pale au sein d'un pas de temps, il est expliqué dans la Section I.2.1. L'algorithme principal²² permet quant à lui de simuler le sillage au cours du temps.

Algorithm 1: Algorithme Point fixe pour trouver Γ_b

Input: position des `blade_nodes`, position des `wake_nodes`, position des `points_kutta`, circulation des `filaments`, vitesse freestream $\vec{u}_\infty$, vitesse géométrique $\vec{u}_{\text{geo}}$, géométrie des sections ($c, \vec{N}, \vec{T}$), `tables_polaires`.

Output: circulation des `bound_filaments` Γ_b .

```

1 Initialiser  $\Gamma^{\text{old}}$  et  $\Gamma^{\text{new}}$ .
2 while  $\|\Gamma^{\text{old}} - \Gamma^{\text{new}}\| > \varepsilon$  do
3    $\Gamma^{\text{old}} \leftarrow \Gamma^{\text{new}}$ 
4   Calculer la vitesse  $\vec{u}_{\text{ind}}$  sur les points_kutta via Biot-Savart Equation (13) ;
5   Calculer la vitesse totale  $\vec{u} = \vec{u}_\infty + \vec{u}_{\text{geo}} + \vec{u}_{\text{ind}}$  sur les points_kutta ;
6   Calculer l'angle d'attaque  $\alpha$  en chaque section via Equation (12) ;
7   Calculer le coefficient de portance  $C_L(\alpha)$  par interpolation des
   tables_polaires ;
8   Calculer  $\Gamma^{\text{new}}$  via la relation de Kutta-Joukowski Equation (10) ;
9 end
10 return  $\Gamma^{\text{new}}$ 

```

21. Sa version en pseudo-codes correspond à l'Algorithme 1.

22. Sa version en pseudo-codes correspond à l'Algorithme 2.

Algorithm 2: Algorithme principal

Input: positions des `blade_nodes`, position des `points_kutta`, pas de temps Δt , vitesse de rotation Ω , vitesse freestream $\vec{u}_\infty$, géométrie des sections $(c, \vec{N}, \vec{T})$.

Output: positions des `wake_nodes`, circulations des `filaments`.

```
1 Initialiser positions des wake_nodes et circulations des filaments
2 for chaque pas de temps  $q = 0, 1, 2, \dots$  do
3   Calculer  $\vec{u}_{\text{ind}}$  sur les blade_nodes et wake_nodes via Biot-Savart Section I.2.2
   ;
4   Calculer les vitesses totales  $\vec{u} = \vec{u}_\infty + \vec{u}_{\text{geo}} + \vec{u}_{\text{ind}}$  sur les blade_nodes ;
5   Calculer les vitesses totales  $\vec{u} = \vec{u}_\infty + \vec{u}_{\text{ind}}$  sur les wake_nodes ;
6   Advecter les wake_nodes via Section I.2.3 ;
7   Créer de nouveaux wake_nodes en advectant les blade_nodes via
   Section I.2.3 ;
8   Déplacer la pale (rotation des blade_nodes, points_kutta,  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$ ) ;
9   Calculer  $\Gamma_b$  via Algorithme 1 ;
10  Mettre à jour les circulations des filaments via Section I.2.4;
11 end
```

I.2.1 Algorithme du point fixe

Dans le théorème de Kutta–Joukowski Equation (10), le calcul de Γ_b est implicite, car $\vec{u}$ dépend lui-même de Γ (via les vitesses induites $\vec{u}_{\text{ind}}$), ce qui amène à une résolution de point fixe par itération :

1. Calcul des vitesses induites $\vec{u}_{\text{ind}}$ sur la lifting-line via Biot–Savart [Equation (13)],
2. Calcul de l’angle d’attaque à partir de $\vec{u}$,
3. Calcul de $C_L(\alpha)$ grâce aux polaires du profil aérodynamique de la pale considérée,
4. Calcul de la nouvelle circulation Γ_b via Kutta–Joukowski (Equation (10)),
5. Application d’un facteur de relaxation η_{relax} :

$$\Gamma^{\text{new}} = \Gamma^{\text{old}} + \eta_{\text{relax}} \cdot (\Gamma_b - \Gamma^{\text{old}}),$$

6. Répétition jusqu’à convergence.

Il n’y a pas de conditions théoriques dans la littérature²³ pour assurer que cet algorithme converge. En pratique le paramètre η_{relax} est calibré de sorte à obtenir la conver-

²³. Un travail similaire a toutefois été mené dans le cadre de la méthode BEM : l’article de mon tuteur de stage, coécrit avec [Ledoux et al., 2021], y établit des critères de convergence pour un algorithme de point fixe.

gence de la méthode de façon empirique. Toutefois, lorsqu'il n'y a pas de relaxation , c'est à dire $\eta_{\text{relax}} = 1$, la suite des Γ^{new} est appelée suite des itérées de Picard. Le théorème de Picard-Banach donne une condition suffisante pour que cet algorithme converge, ce dernier étant le moyen le plus naturel de trouver numériquement le point fixe d'une fonction. On peut trouver l'énoncé et la démonstration de ce théorème dans le livre de [Dedieu, 2006][Chapitre 2.2].

La formule du calcul de l'angle d'attaque utilisée est :

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{N}}{\vec{u} \cdot \vec{T}} \right), \quad (12)$$

où $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la corde locale du profil, et $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal associé, défini de manière à former une base directe avec $\vec{T}$ dans le plan du profil.

Les positions des points d'applications sur la lifting-line que l'on appelle points de Kutta ou points de contrôle dans le cadre du théorème de Kutta-Joukowski sont pris aux milieux des bound filaments.

I.2.2 Calcul de la vitesse induite (Biot–Savart)

Pour chaque filament tourbillonnaire (bound, shed et trailing), on calcule la vitesse induite sur un point de la pale ou du fluide via la loi de Biot–Savart. On rappelle que la vitesse totale induite est la somme des contributions de tous les filaments. L'Equation (7) possède une singularité quand on calcule la vitesse sur un point proche du filament, elle est donc modifiée ainsi :

$$\vec{u}_{\text{Biot-Savart}} := \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(|\vec{r}_1| + |\vec{r}_2|)(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1||\vec{r}_2|(|\vec{r}_1||\vec{r}_2| + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) + \delta^2}. \quad (13)$$

avec $\delta = \epsilon' \cdot \|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\|$ proportionnel à la taille du filament qui permet d'éviter des vitesses infinies lorsque le point d'observation est proche du filament.

Cette singularité s'explique par le fait que la continuité de la version 3D de l'équation de transport de la vorticité est perdue lorsque l'on passe à une représentation 1D.

I.2.3 Schéma d'advection

Chaque point du filament est déplacé selon la vitesse totale résultante de l'écoulement incident et de la vitesse induite via l'Equation (8) :

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(x, t) = \vec{u}_{\infty}(x, t) + \vec{u}_{\text{geo}}(x, t) + \vec{u}_{\text{ind}}(x, t).$$

Ce système d'équations différentielles ordinaires est intégré numériquement au cours du temps pour obtenir la position des marqueurs lagrangiens. On note Δt le pas de discrétisation temporel.

On considère un schéma d'Euler explicite à l'ordre 1 :

$$x^{(q+1)} = x^{(q)} + \Delta t \cdot \vec{u}(x^{(q)}, t^{(q)}).$$

I.2.4 Mise à jour des circulations du sillage (Kelvin)

On note $\Gamma_b^{(q)}(i)$, la circulation obtenue par l'Algorithme 1 pour le bound filament de la i -ème section à l'itération q . Les circulations des filaments shed et trailing qui sont créés à l'itération q sont en vertu du principe qui découle de l'Equation (11) :

$$\Gamma_{\text{shed}}^{(q)}(i) = \Gamma_b^{(q)}(i) - \Gamma_b^{(q-1)}(i) \quad \text{et} \quad \Gamma_{\text{trailing}}^{(q)}(i) = \Gamma_b^{(q)}(i) - \Gamma_b^{(q)}(i-1).$$

Les filaments sont advectés (car leurs extrémités qui sont des marqueurs lagrangiens sont advectés via la Section I.2.3), tout en conservant la circulation qu'on leur a assignée lors de leur création.

On peut voir une section comme un carré qui porte une circulation Γ_b et qui est délimitée par deux filaments shed et deux filaments trailing. La circulation d'un filament est alors la différence des circulations Γ_b entre les deux sections qui partagent ce filament. Pour les filaments sur les bords du sillage, on imagine une section fictive à l'extérieur du sillage de circulation $\Gamma_b = 0$.

I.3 Formalisme Mathématique

I.3.1 Formalisme général

On notera $\hat{e}_x$ l'axe de rotation du rotor et $\hat{e}_z$ la direction du mat. L'axe $\hat{e}_y$ est défini de manière à former une base orthonormée directe et on place l'origine du repère O sur le moyeu. Les vitesses $\vec{u}$ étant les plus élevées aux extrémités de la pale et les plus faibles à proximité du moyeu, il en est de même des angles d'attaques. Pour corriger cette dissymétrie, le profil a ainsi un angle d'inclinaison autour de l'axe $\hat{e}_y$, qui est appelé angle de twist. La corde du profil varie également le long de la pale.

Enfin, dans la pratique, il n'est pas possible de calculer tous les filaments car le nombre de filaments augmente au cours du temps. C'est pourquoi, on impose un âge du sillage maximal. En effet, la formule de Biot-Savart est en $\frac{1}{r}^{24}$, donc les filaments les plus vieux

24. Ici, r désigne la distance orthogonale au filament dans le référentiel terrestre.

(c'est à dire les plus éloignés de la pale à cause de l'advection) ont une contribution négligeable lorsque l'on calcule les circulations liées à la pale Γ_b . Le fait de tronquer le sillage signifie que l'on rentre dans un régime "tapis roulant" une fois le sillage construit : le nombre total de filaments restent constants, il y a autant de filaments qui disparaissent (filaments trop âgés au bout du sillage) que de filaments qui apparaissent (nouveaux filaments émis depuis la pale). Ceci nous permettra de travailler avec des matrices de taille fixée.

On note n le nombre de sections par pale et m la taille du sillage. Il y a $n + 1$ blade nodes par pale. On considère une éolienne à $B = 3$ pales. Soit $M \in \mathcal{M}_{3n+3, m+2}(\mathbb{R}^3)$, la matrice qui représente la position de l'ensemble des nœuds du sillage (blade nodes, edge nodes, wake nodes). Le sillage généré par une pale est illustré dans la Figure 18. Les indices $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ décrivent le sillage produit par la pale n°1, les indices $i \in \llbracket n+2, 2n+2 \rrbracket$ décrivent le sillage produit par la pale n°2 et enfin les indices $i \in \llbracket 2n+3, 3n+3 \rrbracket$ décrivent le sillage produit par la pale n°3.

On introduit les vecteurs de taille $3n + 3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ suivants :

- les blade nodes $b := (b_1, \dots, b_{3n+3})$ qui correspondent aux points verts de chaque pale : $(M_{i,1})_{1 \leq i \leq 3n+3}$,
- les edge nodes $e := (e_1, \dots, e_{3n+3})$ qui correspondent aux points violets sur le bord de fuite de chaque pale (trailing edge) : $(M_{i,2})_{1 \leq i \leq 3n+3}$.

On note également $\Lambda \in \mathcal{M}_{3n+2, m+1}(\mathbb{R})$ la matrice des circulations associées à chaque section au cours du temps. Afin d'unifier le formalisme tripale, on introduit pour chaque section $k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$ un décalage d'indice $p = \lfloor \frac{k-1}{n} \rfloor \in \{0, 1, 2\}$, identifiant la pale correspondante. On définit alors l'indice du nœud gauche de la k -ième section par $i_k := k + p$.

Cette construction permet d'imposer naturellement une circulation nulle sur les deux sections fictives séparant les pales, soit : $\forall j, \Lambda_{n+1,j} = \Lambda_{2n+2,j} = 0$.

Le vecteur $\Gamma \in \mathbb{R}^{3n}$, représentant la circulation *bound* des trois pales à l'instant courant, est alors relié à la première colonne de la matrice Λ par la relation : $\forall k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket, \Gamma_k := \Lambda_{i_k,1}$.

On suppose que les points d'application P_k du théorème de Kutta-Joukowski (représentés en marron sur la Figure 18) sont situés aux milieux des filaments *bound*. En utilisant le décalage d'indice pour « sauter » les jonctions entre les pales, on obtient :

$$P_k := \frac{b_{i_k} + b_{i_k+1}}{2}. \quad (14)$$

Enfin, par définition, la lifting-line est au quart de corde. Par conséquent, la corde

locale c_k de la k -ième section qui est définie comme la distance entre son bord d'attaque et son bord de fuite peut s'écrire : $c_k := \frac{4}{3} \cdot \left\| \frac{e_{i_k} + e_{i_k+1}}{2} - P_k \right\|$. On notera $c := (c_1, \dots, c_{3n})$ le vecteur des cordes associé.

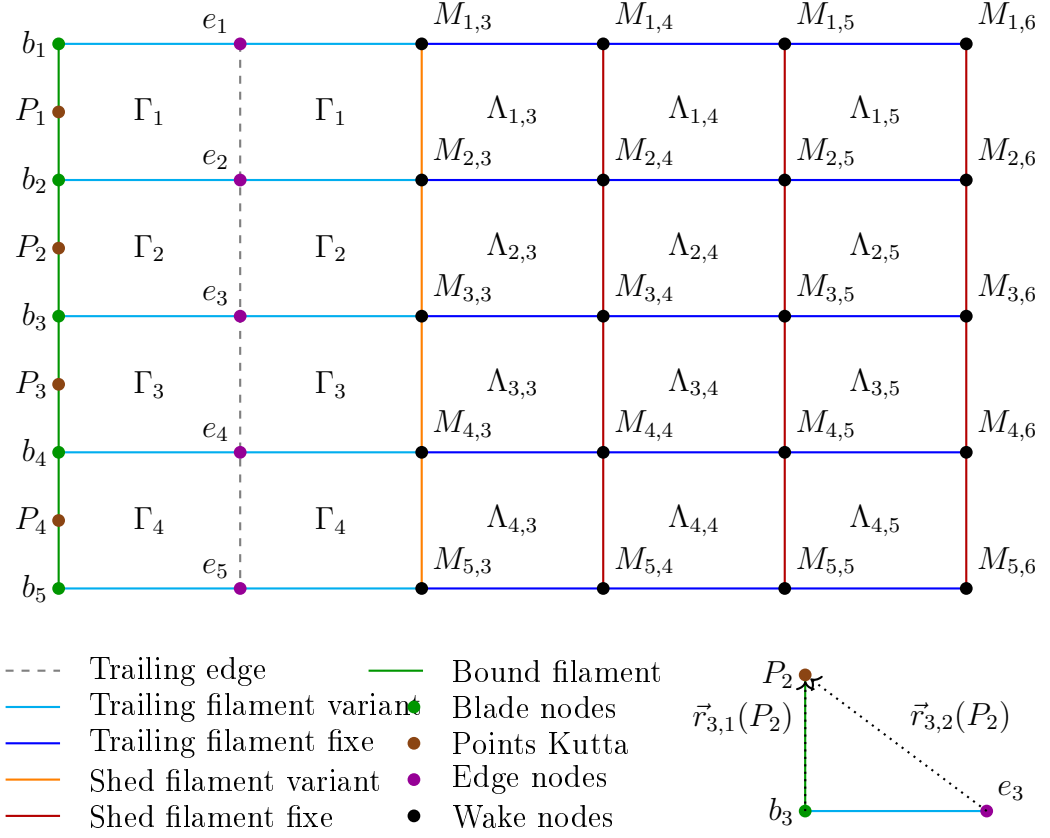


FIGURE 18 – Représentation schématique d'un sillage produit par la première pale pour $n = 4$ et $m = 4$ et exemple d'un triangle trailing $(3, 1) \rightarrow P_2$.

Pour $i \in \llbracket 1, 3n + 2 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m + 2 \rrbracket$, on définit le coefficient géométrique du bound ou shed filament $[M_{i,j} M_{i+1,j}]$ par :

$$\vec{\mathcal{S}}_{i,j} := \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(\|\vec{r}_{i,j}\| + \|\vec{r}_{i+1,j}\|)(\vec{r}_{i,j} \times \vec{r}_{i+1,j})}{\|\vec{r}_{i,j}\| \cdot \|\vec{r}_{i+1,j}\| \cdot (\|\vec{r}_{i,j}\| \cdot \|\vec{r}_{i+1,j}\| + \vec{r}_{i,j} \cdot \vec{r}_{i+1,j}) + \delta_{\text{shed},i,j}^2},$$

avec $\vec{r}_{i,j}(P, M) := P - M_{i,j}$ où $P \in \mathbb{R}^3$ est un marqueur lagrangien du fluide, et $\delta_{\text{shed},i,j}(M) := \epsilon' \cdot \|M_{i+1,j} - M_{i,j}\|$.

La circulation de ce filament est $\Lambda_{i,j} - \Lambda_{i,j-1}$ avec la convention $\Lambda_{i,0} = 0 = \Lambda_{i,m+2}$. En outre, les filaments sur le trailing edge qui sont constitués de edge nodes ont une circulation nulle. Dans la Figure 17, c'est ce principe qui est appelé condition de Kutta, ceci impose $\Lambda_{i_k,2} = \Lambda_{i_k,1} := \Gamma_k$.

De même, pour $i \in \llbracket 1, 3n + 3 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, m + 1 \rrbracket$, on définit le coefficient géométrique du trailing filament $[M_{i,j} M_{i,j+1}]$ par :

$$\vec{\mathcal{T}}_{i,j} := \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{(\|\vec{r}_{i,j}\| + \|\vec{r}_{i,j+1}\|)(\vec{r}_{i,j} \times \vec{r}_{i,j+1})}{\|\vec{r}_{i,j}\| \cdot \|\vec{r}_{i,j+1}\| \cdot (\|\vec{r}_{i,j}\| \cdot \|\vec{r}_{i,j+1}\| + \vec{r}_{i,j} \cdot \vec{r}_{i,j+1}) + \delta_{\text{trailing},i,j}^2},$$

avec $\delta_{\text{trailing},i,j}(M) := \epsilon' \cdot \|M_{i,j+1} - M_{i,j}\|$.

La circulation de ce filament est $\Lambda_{i,j} - \Lambda_{i-1,j}$ avec la convention $\Lambda_{0,j} = 0 = \Lambda_{3n+3,j}$. Ces filaments sont représentés en cyan et en bleu foncé sur la Figure 18.

La vitesse induite en un marqueur lagrangien $P \in \mathbb{R}^3$ est d'après la formule de Biot-Savart de l'Equation (13) :

$$\vec{u}_{\text{ind}}(P, M, \Lambda) := \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3n+2 \\ 1 \leq j \leq m+2}} (\Lambda_{i,j} - \Lambda_{i,j-1}) \cdot \vec{\mathcal{S}}_{i,j}(P, M) + \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3n+3 \\ 1 \leq j \leq m+1}} (\Lambda_{i,j} - \Lambda_{i-1,j}) \cdot \vec{\mathcal{T}}_{i,j}(P, M).$$

Un changement d'indice permet de réécrire cette expression sous la forme :

$$\vec{u}_{\text{ind}}(P, M, \Lambda) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq 3n+2 \\ 1 \leq j \leq m+1}} \Lambda_{i,j} \cdot \left(\vec{\mathcal{S}}_{i,j}(P, M) - \vec{\mathcal{S}}_{i,j+1}(P, M) + \vec{\mathcal{T}}_{i,j}(P, M) - \vec{\mathcal{T}}_{i+1,j}(P, M) \right). \quad (15)$$

Lorsque la pale tourne à une vitesse angulaire Ω , la vitesse totale au point P est :

$$\vec{u}(P, M, \Lambda) = \vec{u}_{\infty} + \vec{u}_{\text{geo}}(P, \Omega) + \vec{u}_{\text{ind}}(P, M, \Lambda), \quad (16)$$

avec $\vec{u}_{\text{geo}}(P, \Omega) = \vec{\Omega} \times \vec{OP}$ si P est sur une pale et 0 sinon.

I.3.2 Formalisme de l'algorithme du point fixe

Dans l'algorithme du point fixe : Algorithme 1, on note $f := (f_1, \dots, f_{3n})$ la fonction de $\mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ qui à un $\Gamma \in \mathbb{R}^{3n}$ lui associe sa nouvelle valeur entre deux itérations. Puisque la matrice M et les composantes de $\Lambda_{i,j}$ sont fixées pour $j \geq 3$, on notera la vitesse au point de Kutta P_k , $\vec{u}(P_k, \Gamma)$ au lieu de $\vec{u}(P_k, M, \Lambda)$. Soit $\Pi_k := \text{Vect}(\vec{N}_k \times \vec{T}_k)^\perp$ le plan géométrique de la k -ième section. En effet $\vec{N}_k$ et $\vec{T}_k$ définissent la géométrie de la k -ième section. On notera $\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)$ la projection orthogonale de la vitesse totale $\vec{u}(P_k, \Gamma)$ sur Π_k .

En vertu de l'Equation (10), la k -ème composante de la nouvelle valeur de Γ est donnée par :

$$\Gamma_k^{\text{new}} = f_k(\Gamma^{\text{old}}) := \frac{1}{2} C_L(\alpha_k, P_k) \cdot c_k \cdot \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma^{\text{old}})\|. \quad (17)$$

L'angle d'attaque est donné par :

$$\alpha_k := \arctan \left(\frac{\vec{u}(P_k, \Gamma^{\text{old}}) \cdot \vec{N}_k}{\vec{u}(P_k, \Gamma^{\text{old}}) \cdot \vec{T}_k} \right),$$

$C_L(\alpha_k, P_k)$ se déduit par interpolation²⁵ et est propre à chaque profil. Il est important de préciser que les tables polaires dépendent également du nombre de Reynolds. Pour simplifier, on supposera un écoulement turbulent avec Re fixé.

La partie de $\vec{u}_{\text{ind}}(P_k, M, \Lambda)$ et donc de $\vec{u}(P_k, M, \Lambda)$ qui dépend de Γ et que l'on notera $\vec{u}_v$ est obtenue pour les indices $j = 1$ et $j = 2$ dans la somme de l'Equation (15). On a ainsi :

$$\vec{u}_v(P_k, M, \Gamma) = \sum_{l=1}^{3n} \Gamma_l \cdot \vec{\mathcal{F}}_l(P_k, M), \quad (18)$$

avec pour $l \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$ et $i_l := l + \lfloor \frac{l-1}{n} \rfloor$:

$$\vec{\mathcal{F}}_l(P_k, M) := \vec{\mathcal{S}}_{i_l,1}(P_k, M) - \vec{\mathcal{S}}_{i_l,3}(P_k, M) + \vec{\mathcal{T}}_{i_l,1}(P_k, M) - \vec{\mathcal{T}}_{i_l+1,1}(P_k, M) + \vec{\mathcal{T}}_{i_l,2}(P_k, M) - \vec{\mathcal{T}}_{i_l+1,2}(P_k, M).$$

Cette expression fait donc intervenir uniquement les filaments bound en vert, les filaments shed en orange et les filaments trailing en cyan dans la Figure 18.

Pour étudier si f admet des points fixes nous allons introduire les normes suivantes sur $\mathbb{R}^{3n}$:

- $\|\Gamma\|_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq 3n} |\Gamma_k|$,
- $\|\Gamma\|_p = \left(\sum_{k=1}^{3n} |\Gamma_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$,
- $\|\cdot\|_{\star}$ désignera une norme quelconque.

Il s'agit des normes usuelles. On rappelle que $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^3$ ($p = 2$).

Si Γ' et Γ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^{3n}$, on notera $\Gamma \leq \Gamma'$ lorsque pour tout $1 \leq k \leq 3n$, on a $\Gamma_k \leq \Gamma'_k$. On notera également $|\Gamma|$ le vecteur $(|\Gamma_1|, \dots, |\Gamma_{3n}|)$.

I.3.3 Formalisme de l'advection dans l'algorithme principal

On étudie l'évolution des différentes grandeurs entre les instants q et $q+1$. On discrétise une rotation complète 2π en N_{az} points. On définit ainsi le pas angulaire $\Delta\theta := \frac{2\pi}{N_{\text{az}}}$ et le pas temporel associé $\Delta t := \frac{\Delta\theta}{\Omega}$.

L'âge maximal du sillage est $m \cdot \Delta t$. Pour $q \geq m$, le sillage est tronqué, ce qui permet de travailler avec des matrices de taille fixe, justifié par la contribution négligeable des

25. Dans le cadre de ce stage, on a utilisé systématiquement des interpolations linéaires.

filaments les plus éloignés. Par construction de notre éolienne tripale, à l'instant initial $q = 0$, la géométrie de la pale n°2 se déduit de la pale n°1 par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe $\hat{e}_x$, et celle de la pale n°3 par une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$.

La circulation sur les pales à l'instant q , notée $\Gamma^{(q)}$, est définie comme le point fixe de la fonction $f^{(q)} := (f_1^{(q)}, \dots, f_{3n}^{(q)})$ avec, pour tout $k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$:

$$f_k^{(q)} : \Gamma \mapsto \frac{1}{2} C_L(\alpha_k, P_k) \cdot c_k \cdot \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, M^{(q)}, \Lambda^{(q)})\|. \quad (19)$$

En utilisant l'indice $i_k := k + \lfloor \frac{k-1}{n} \rfloor$ pour faire correspondre la k -ième section à la bonne ligne de la matrice Λ , on a les relations de mise à jour suivantes pour tout $k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$:

- $\Lambda_{i_k, 2}^{(q+1)} = \Lambda_{i_k, 1}^{(q+1)} = \Gamma_k^{(q+1)}$,
- pour tout $j \in \llbracket 3, m+1 \rrbracket$, $\Lambda_{i_k, j}^{(q+1)} := \Lambda_{i_k, j-1}^{(q)}$.

Une récurrence immédiate redonne²⁶ que pour tout $k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 3, m+1 \rrbracket$:

$$\Lambda_{i_k, j}^{(q)} := \Gamma_k^{(q+2-j)}. \quad (20)$$

Pour une éolienne tournant à la vitesse Ω autour de l'axe $\hat{e}_x$, on introduit la matrice de rotation d'angle $\Delta\theta$:

$$R(\Delta\theta) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Delta\theta) & -\sin(\Delta\theta) \\ 0 & \sin(\Delta\theta) & \cos(\Delta\theta) \end{pmatrix}.$$

Les points des pales sont déplacés par rotation tandis que ceux du sillage sont advectés par un schéma d'Euler à partir du trailing edge. On a ainsi :

- pour $i \in \llbracket 1, 3n+3 \rrbracket$, $b_i^{(q+1)} = R(\Delta\theta) \cdot b_i^{(q)}$ (blade nodes $M_{i,1}$),
- pour $i \in \llbracket 1, 3n+3 \rrbracket$, $e_i^{(q+1)} = R(\Delta\theta) \cdot e_i^{(q)}$ (edge nodes $M_{i,2}$),
- pour $k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$, $P_k^{(q+1)} = R(\Delta\theta) \cdot P_k^{(q)}$ (points de Kutta),
- pour $i \in \llbracket 1, 3n+2 \rrbracket$ et $j \in \llbracket 3, m+2 \rrbracket$, $M_{i,j}^{(q+1)} = M_{i,j-1}^{(q)} + \Delta t \cdot \vec{u}(M_{i,j-1}^{(q)}, M^{(q)}, \Lambda^{(q)})$.

On a ainsi par récurrence immédiate pour tout $i \in \llbracket 1, 3n+2 \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 2, m+2 \rrbracket$:

$$M_{i,j}^{(q)} = R((q+2-j)\Delta\theta) \cdot e_i^{(0)} + \Delta t \cdot \sum_{s=1}^{j-2} \vec{u}(M_{i,j-s}^{(q-s)}, M^{(q-s)}, \Lambda^{(q-s)}). \quad (21)$$

26. La définition exacte de $\Lambda_{i_k, j}^{(q)}$ est en fait "la circulation bound de la k -ième section à l'instant $q+2-j$ ".

II Résultats théoriques concernant l'algorithme du point fixe de la méthode FVW

Cette annexe est une mise à jour de mon rapport de stage étude et recherche.

II.1 Jacobienne

Dans cette section, on calcule la Jacobienne de f . On note H_k l'ensemble des solutions de l'équation d'inconnue $\Gamma : \vec{u}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{T}_k = 0$. Il s'agit d'une équation linéaire à $3n$ inconnues. On suppose qu'il existe $i \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$ tel que $\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \cdot \vec{T}_k \neq 0$. On a alors que H_k est un hyperplan affine (de dimension $3n - 1$). Par suite, H_k est fermé et on travaillera ainsi sur l'ouvert $\mathcal{O} := \bigcap_{k=1}^{3n} H_k^c$. On a forcément $\mathcal{O} \neq \emptyset$ car on ne peut pas recouvrir $\mathbb{R}^{3n}$ avec un nombre fini d'hyperplans.

L'application f définie dans l'Equation (17) est clairement une application $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}, \mathbb{R}^{3n})$, car pour tout $k \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$:

- $\Gamma \mapsto \vec{u}(P_k, \Gamma)$ est une application $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{3n}, \mathbb{R})$ qui ne s'annule pas sur $\mathcal{O}$,
- $(\alpha, P) \mapsto C_L(\alpha, P)$ est une application $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$,
- $(x, y) \mapsto \arctan(\frac{x}{y})$ est une application $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \mathbb{R})$.

Proposition II.1. *Le coefficient $(k, i) \in \llbracket 1, 3n \rrbracket^2$ de la Jacobienne de f en $\Gamma \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{3n}$ est donné par :*

$$\frac{\partial f_k}{\partial \Gamma_i} = \frac{c_k}{2\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|} \left(C_L(\alpha_k, P_k) \left(\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \cdot \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \right) + \frac{\partial C_L(\alpha_k, P_k)}{\partial \alpha} \left(\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right) \right).$$

Démonstration. La fonction f_k s'écrit formellement en utilisant la norme de la vitesse projetée sur le plan de la section Π_k d'après l'Equation (17) :

$$f_k(\Gamma) := \frac{1}{2} c_k C_L(\alpha_k, P_k) \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|.$$

Les coefficients de la Jacobienne de f s'obtiennent par dérivation selon la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f_k}{\partial \Gamma_i} = \frac{1}{2} c_k C_L(\alpha_k, P_k) \frac{\partial \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|}{\partial \Gamma_i} + \frac{1}{2} c_k \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\| \frac{\partial C_L(\alpha_k, P_k)}{\partial \Gamma_i}.$$

Puisque les vecteurs $\vec{N}_k$ et $\vec{T}_k$ forment une base orthonormée du plan Π_k , l'angle

d'attaque s'exprime exclusivement à partir de la vitesse projetée :

$$\alpha_k = \arctan \left(\frac{\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{N}_k}{\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{T}_k} \right).$$

L'Equation (15) et l'Equation (16) donnent la dérivée de la vitesse 3D complète :

$$\frac{\partial \vec{u}(P_k, \Gamma)}{\partial \Gamma_i} = \frac{\partial \vec{u}_v(P_k, \Gamma)}{\partial \Gamma_i} = \vec{\mathcal{F}}_i(P_k).$$

La projection orthogonale sur le plan Π_k étant un opérateur linéaire, la dérivée de la vitesse projetée est la projection de l'induction 3D, que l'on note $\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k}(P_k)$:

$$\frac{\partial \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)}{\partial \Gamma_i} = \text{Proj}_{\Pi_k} \left(\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \right) := \vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k}(P_k).$$

Calculons la différentielle de la norme de la vitesse projetée.

$$\text{On a : } \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|^2 = \left(\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{N}_k \right)^2 + \left(\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{T}_k \right)^2.$$

Par dérivation, on obtient :

$$\frac{\partial \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|}{\partial \Gamma_i} = \frac{1}{2\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|} \left(2 \left(\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{N}_k \right) \left(\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k} \cdot \vec{N}_k \right) + 2 \left(\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{T}_k \right) \left(\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k} \cdot \vec{T}_k \right) \right),$$

ce qui se simplifie en reconnaissant le produit scalaire dans le plan Π_k :

$$\frac{\partial \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|}{\partial \Gamma_i} = \frac{\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k}(P_k) \cdot \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)}{\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|}.$$

Or, par définition de la projection orthogonale, la composante hors-plan de l'induction (orthogonale à Π_k) a un produit scalaire nul avec tout vecteur de Π_k , notamment $\vec{u}_{\Pi_k}$. On a donc l'invariance : $\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k} \cdot \vec{u}_{\Pi_k} = \vec{\mathcal{F}}_i \cdot \vec{u}_{\Pi_k}$. Ainsi :

$$\frac{\partial \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|}{\partial \Gamma_i} = \frac{\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \cdot \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)}{\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|}.$$

Calculons ensuite la dérivée de l'angle d'attaque via la dérivée de la fonction arctan :

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \Gamma_i} = \frac{\left(\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k}(P_k) \cdot \vec{N}_k \right) \left(\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{T}_k \right) - \left(\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k}(P_k) \cdot \vec{T}_k \right) \left(\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{N}_k \right)}{\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|^2}.$$

Au numérateur, on reconnaît la composante normale du produit vectoriel de deux

vecteurs du plan Π_k , portée par le vecteur hors-plan $\vec{N}_k \times \vec{T}_k$:

$$\frac{\partial \alpha_k}{\partial \Gamma_i} = \frac{\left(\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k}(P_k) \times \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right)}{\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|^2}.$$

À nouveau, substituons l'induction projetée par l'induction 3D complète :

$$\vec{\mathcal{F}}_i = \vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k} + \left(\vec{\mathcal{F}}_i \cdot (\vec{N}_k \times \vec{T}_k) \right) \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right).$$

On sait que :

$$\left((\vec{N}_k \times \vec{T}_k) \times \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right) = 0 = \left((\vec{N}_k \times \vec{T}_k) \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right).$$

Il en résulte la seconde invariance spatiale :

$$\left(\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k} \times \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right) = \left(\vec{\mathcal{F}}_i \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right).$$

L'application de la règle de la chaîne sur le coefficient de portance donne finalement :

$$\frac{\partial C_L(\alpha_k, P_k)}{\partial \Gamma_i} = \frac{\partial C_L(\alpha_k, P_k)}{\partial \alpha} \frac{\left(\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right)}{\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|^2}.$$

En injectant ces deux dérivées invariantes dans l'expression initiale de $\frac{\partial f_k}{\partial \Gamma_i}$, et en factorisant par $\frac{1}{\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|}$, on retrouve l'expression matricielle attendue utilisant directement l'induction tridimensionnelle. $\square$

On introduit le vecteur de $\mathbb{R}^{3n}$, $C := (C_1, \dots, C_{3n})$ qui représente la valeur pondérée par la corde du maximum des contributions du coefficient de portance et de sa dérivée dont la k -ième composante est :

$$C_k := \frac{1}{2} c_k \max_{\alpha \in [-\pi, \pi]} \left(|C_L(\alpha, P_k)| + \left| \frac{\partial C_L}{\partial \alpha}(\alpha, P_k) \right| \right).$$

Proposition II.2. *On obtient ainsi une majoration des coefficients de la jacobienne sur $\mathcal{O}$ qui ne dépend plus de Γ , pour tout $(k, i) \in \llbracket 1, 3n \rrbracket^2$:*

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial \Gamma_i} \right| \leq C_k \cdot \|\vec{\mathcal{F}}_{i, \Pi_k}(P_k)\|.$$

Démonstration. En appliquant l'inégalité triangulaire dans Proposition II.1 on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f_k}{\partial \Gamma_i} \right| &\leq \frac{c_k}{2\|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\|} \left(|C_L(\alpha_k, P_k)| \left| \vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \cdot \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{\partial C_L(\alpha_k, P_k)}{\partial \alpha} \right| \left| \left(\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right) \right| \right). \end{aligned}$$

On rappelle qu'on a les deux invariances suivantes :

- $\vec{\mathcal{F}}_{i,\Pi_k} \cdot \vec{u}_{\Pi_k} = \vec{\mathcal{F}}_i \cdot \vec{u}_{\Pi_k}$
- $\left(\vec{\mathcal{F}}_{i,\Pi_k} \times \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right) = \left(\vec{\mathcal{F}}_i \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right).$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet alors d'obtenir d'une part :

$$\left| \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \cdot \vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \right| \leq \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\| \cdot \|\vec{\mathcal{F}}_{i,\Pi_k}(P_k)\|,$$

et d'autre part :

$$\left| \left(\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right) \right| \leq \left\| \vec{\mathcal{F}}_i(P_k, \Pi_k) \times \vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma) \right\| \cdot \|\vec{N}_k \times \vec{T}_k\|.$$

Puisque $\vec{N}_k \times \vec{T}_k$ est unitaire, on obtient en majorant la norme du produit vectoriel par le produit des normes :

$$\left| \left(\vec{\mathcal{F}}_i(P_k) \times \vec{u}(P_k, \Gamma) \right) \cdot \left(\vec{N}_k \times \vec{T}_k \right) \right| \leq \|\vec{u}_{\Pi_k}(P_k, \Gamma)\| \cdot \|\vec{\mathcal{F}}_{i,\Pi_k}(P_k)\|.$$

Il vient donc que :

$$\left| \frac{\partial f_k}{\partial \Gamma_i} \right| \leq \frac{1}{2} \left(|C_L(\alpha_k, P_k)| + \left| \frac{\partial C_L(\alpha_k, P_k)}{\partial \alpha} \right| \right) \cdot \|\vec{\mathcal{F}}_{i,\Pi_k}(P_k)\|.$$

On conclut finalement en utilisant la définition de C_k . □

On pose la matrice de $\mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\mathcal{K} := [C_j \cdot \|\vec{\mathcal{F}}_{i,\Pi_j}(P_j)\|]_{1 \leq i,j \leq 3n}, \quad (22)$$

et on note la norme subordonnée de sa transposée :

$$K_\star := \|\vec{\mathcal{K}}\|_\star = \sup_{X \in \mathbb{R}^{3n}, \|X\|_\star=1} \|\vec{\mathcal{K}} \cdot X\|_\star.$$

On fait l'hypothèse que $\|\cdot\|_\star$ est une norme qui conserve les inégalités entre les vecteurs dont les composantes sont positives et d'autre part qu'un vecteur et sa valeur absolue ont même norme :

- $\forall \Gamma \in \mathbb{R}^{3n}, \|\Gamma\|_\star = \|\Gamma\|_\star,$
- $\forall \Gamma', \Gamma \in \mathbb{R}^{3n}, 0 \leq \Gamma \leq \Gamma' \implies \|\Gamma\|_\star \leq \|\Gamma'\|_\star.$

C'est notamment le cas des normes $\|\cdot\|_p$ pour $p \in \{1, \dots, \infty\}$.

On obtient le corollaire suivant :

Corollaire II.1. *La différentielle de f est uniformément bornée sur $\mathcal{O}$:*

$$\sup_{\Gamma \in \mathcal{O}} \|d_{\Gamma} f\|_{\star} \leq K_{\star}.$$

Démonstration. D'après la Proposition II.2, on a l'inégalité matricielle $d_{\Gamma} f \leq {}^t\mathcal{K}$. Celle-ci est conservée lorsque l'on passe à la norme subordonnée $\|\cdot\|_{\star}$ par hypothèse sur $\|\cdot\|_{\star}$. $\square$

II.2 Constante de Lipschitz

L'objectif de cette section est de montrer que f est une application lipschitzienne. On donne une majoration de sa constante de Lipschitz ainsi qu'une CNS pour que cette majoration soit plus petite que 1. Le théorème du point fixe de Banach-Picard donne seulement une CS pour que l'Algorithme 1 converge. Par conséquent, ce dernier peut tout de même converger sans pour autant que f soit contractante ou que la majoration calculée dans cette section soit plus petite que 1.

Théorème II.1. *L'application f est lipschitzienne sur tout ouvert convexe $\mathcal{O}_{conv} \subset \mathcal{O}$. De plus, sa constante de Lipschitz par rapport à $\|\cdot\|_{\star}$ est majorée par $K_{\star}$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis et du Corollaire II.1. $\square$

Corollaire II.2. *Si les deux conditions suivantes sont simultanément vérifiées :*

- *Il existe un ensemble E et un ouvert convexe $\mathcal{O}_{conv} \subset \mathcal{O}$ tel que $E \subset \mathcal{O}_{conv}$ et $f(E) \subset E$,*
- *$K_{\star} < 1$.*

Alors f admet un unique point fixe sur E . L'Algorithme 1 converge vers celui-ci en initialisant avec un $\Gamma^{old} \in E$.

Démonstration. Il s'agit d'une application directe du théorème du point fixe de Banach-Picard. En effet, par hypothèse et en vertu du Théorème II.1, on a que f est une application contractante sur E par rapport à $\|\cdot\|_{\star}$. De plus, en dimension finie toutes les normes sont équivalentes donc $(\mathbb{R}^{3n}, \|\cdot\|_{\star})$ est complet. $\square$

Pour $p \in \{1, 2, \infty\}$, on explicite K_p grâce à [Quarteroni et al., 2007][Chapitre 1.11] :

Proposition II.3. *On a les égalités suivantes avec ρ le rayon spectral :*

- $K_{\infty} = \max_{1 \leq k \leq 3n} \left(C_k \sum_{l=1}^{3n} \left\| \vec{\mathcal{F}}_{l, \Pi_k}(P_k) \right\| \right),$
- $K_1 = \max_{1 \leq l \leq 3n} \left(\sum_{k=1}^{3n} C_k \left\| \vec{\mathcal{F}}_{l, \Pi_k}(P_k) \right\| \right),$
- $K_2 = \sqrt{\rho(\mathcal{K}\mathcal{K})}.$

Lemme II.1. *Pour tout réel $r > \rho(\mathcal{K})$, la norme définie sur $\mathbb{R}^{3n}$ par $\|\Gamma\|_\star = \sup_{q \in \mathbb{N}} \frac{\|\mathcal{K}^q \Gamma\|_\infty}{r^q}$ permet d'obtenir : $K_\star \leq r$.*

Théorème II.2. *Si $\rho(\mathcal{K}) < 1$ et s'il existe un ouvert convexe $\mathcal{O}_{conv} \subset \mathcal{O}$ et un ensemble $E \subset \mathcal{O}_{conv}$ tel que $f(E) \subset E$, alors f admet un unique point fixe sur E et l'Algorithme 1 converge vers celui-ci en initialisant avec un $\Gamma^{old} \in E$.*

Si $\rho(\mathcal{K}) > 1$, alors pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|_\star$ de $\mathbb{R}^{3n}$, on a $K_\star \geq 1$. La démarche présentée ici ne permet donc pas de conclure sur le fait que f soit contractante ou non dans ce cas de figure.

Démonstration. Pour le premier point, on introduit la norme du Lemme II.1 pour $r \in]\rho(\mathcal{K}), 1[$. On a ainsi :

$$K_\star \leq r < 1.$$

Puisque $\|\cdot\|_\star$ vérifie bien la conservation des inégalités vectorielles positives et préserve la valeur absolue, on peut appliquer le Corollaire II.2 ce qui conclut.

Le deuxième point découle du fait que pour toute norme $\|\cdot\|_\star$, on a $\rho(\mathcal{K}) \leq K_\star$. $\square$

II.3 Résolution par la méthode de Newton

Puisque nous disposons de l'expression analytique exacte de la Jacobienne de f (établie dans la Section II.1), une alternative robuste à l'itération de point fixe classique (méthode de Picard) consiste à utiliser la méthode de Newton-Raphson qui est par exemple décrite par [Dedieu, 2006][Chapitre 3]. En effet, chercher un point fixe de f revient à chercher une racine de la fonction $F : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}$ définie par :

$$F(\Gamma) := \Gamma - f(\Gamma). \quad (23)$$

La matrice Jacobienne de F en un point Γ s'exprime trivialement à l'aide de la Jacobienne de f et de la matrice identité I_{3n} de taille $3n$:

$$J_F(\Gamma) = I_{3n} - d_\Gamma f, \quad (24)$$

Le schéma itératif de la méthode de Newton s'écrit alors, pour une itération p ²⁷ :

$$\Gamma^{(p+1)} = \Gamma^{(p)} - [J_F(\Gamma^{(p)})]^{-1} F(\Gamma^{(p)}). \quad (25)$$

En pratique, pour éviter l'inversion explicite de la matrice, on résout à chaque itération :

$$(I_{3n} - d_{\Gamma^{(p)}} f) \cdot \Delta \Gamma^{(p)} = f(\Gamma^{(p)}) - \Gamma^{(p)}, \quad (26)$$

puis on met à jour la circulation : $\Gamma^{(p+1)} = \Gamma^{(p)} + \Delta \Gamma^{(p)}$.

²⁷. Attention à ne pas confondre une itération interne p pour le point fixe avec le pas de temps q .

Remarque II.1. L'avantage majeur de cette méthode est sa convergence quadratique au voisinage de la solution. Si le rayon spectral de $d_\Gamma f$ est supérieur à 1 (ce qui fait en général échouer l'algorithme du point fixe classique sans relaxation), la méthode de Newton peut tout de même converger rapidement à condition que $I_{3n} - d_\Gamma f$ soit inversible et que l'initialisation $\Gamma^{(0)}$ soit suffisamment proche du point fixe cherché.

II.4 Retour à la Relaxation

Dans le cas où on applique un facteur de relaxation, la fonction $f_{\eta_{\text{relax}}}$ de Algorithme 1, devient :

$$f_{\eta_{\text{relax}}} : \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R}^{3n}, \Gamma \mapsto \Gamma + \eta_{\text{relax}} \cdot (f(\Gamma) - \Gamma), \quad (27)$$

où f reste la fonction définie dans l'Equation (17) qui correspond au cas sans relaxation ($\eta_{\text{relax}} = 1$).

Ainsi, la jacobienne de $f_{\eta_{\text{relax}}}$ en Γ est donnée par :

$$d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}} = (1 - \eta_{\text{relax}}) \cdot I_{3n} + \eta_{\text{relax}} \cdot d_\Gamma f, \quad (28)$$

où I_{3n} est la matrice identité de taille $3n$ tandis que les coefficients de $d_\Gamma f$ ont été calculés dans la Section II.1. On remarquera que si $\eta_{\text{relax}} \neq 0$ alors Γ est un point fixe de f si et seulement si Γ est un point fixe de $f_{\eta_{\text{relax}}}$.

Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_{3n}$ les valeurs propres (a priori complexes) de $d_\Gamma f$ en un $\Gamma \in \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{3n}$ fixé et que l'on note la famille de réels $\kappa_i := \frac{2(1 - \text{Re}(\lambda_i))}{|\lambda_i - 1|^2}$ pour $i \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$ (bien définis si $\lambda_i \neq 1$), on a alors le théorème suivant :

Théorème II.3. *En notant ρ le rayon spectral, on a les propriétés suivantes :*

- Si pour tout $i \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$, on a $\text{Re}(\lambda_i) > 1$, alors prendre $\eta_{\text{relax}} \in]\max_{1 \leq i \leq 3n} \kappa_i, 0[$ permet d'obtenir $\rho(d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}}) < 1$.
- Si pour tout $i \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$, on a $\text{Re}(\lambda_i) < 1$, alors prendre $\eta_{\text{relax}} \in]0, \min_{1 \leq i \leq 3n} \kappa_i[$ permet d'obtenir $\rho(d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}}) < 1$.
- S'il existe $(i, j) \in \llbracket 1, 3n \rrbracket^2$ tel que $\text{Re}(\lambda_i) \leq 1$ et $\text{Re}(\lambda_j) \geq 1$ alors quel que soit $\eta_{\text{relax}} \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\rho(d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}}) \geq 1$.

Démonstration. Cela vient du fait que les valeurs propres de la Jacobienne relaxée $d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}}$ sont de la forme $\mu_i = 1 + \eta_{\text{relax}} \cdot (\lambda_i - 1)$. On a donc $\rho(d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}}) < 1$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$, le module au carré $|\mu_i|^2 < 1$. Or on a :

$$|\mu_i|^2 = |1 + \eta_{\text{relax}}(\lambda_i - 1)|^2 = 1 + 2\eta_{\text{relax}}\text{Re}((\lambda_i - 1)) + \eta_{\text{relax}}^2|\lambda_i - 1|^2.$$

Par conséquent $\rho(d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}}) < 1$ si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, 3n \rrbracket$:

$$\eta_{\text{relax}} (2(\mathcal{R}e(\lambda_i) - 1) + \eta_{\text{relax}} |\lambda_i - 1|^2) < 0.$$

L'analyse de cette inéquation dépend du signe de η_{relax} :

- Si $\eta_{\text{relax}} > 0$, l'inéquation donne $2(\mathcal{R}e(\lambda_i) - 1) + \eta_{\text{relax}} |\lambda_i - 1|^2 < 0$, ce qui impose $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 1$. On en déduit la majoration $\eta_{\text{relax}} < \frac{2(1-\mathcal{R}e(\lambda_i))}{|\lambda_i-1|^2} := \kappa_i$.
- Si $\eta_{\text{relax}} < 0$, l'inéquation s'inverse après division et donne $2(\mathcal{R}e(\lambda_i) - 1) + \eta_{\text{relax}} |\lambda_i - 1|^2 > 0$, ce qui impose $\mathcal{R}e(\lambda_i) > 1$. On obtient alors la minoration $\eta_{\text{relax}} > \frac{2(1-\mathcal{R}e(\lambda_i))}{|\lambda_i-1|^2} = \kappa_i$.
- Si $\eta_{\text{relax}} = 0$, l'inégalité stricte n'est jamais vérifiée. De même si $\lambda_i = 1$.

On prend ensuite l'intersection de ces intervalles de validité pour i décrivant $\llbracket 1, 3n \rrbracket$. L'intersection n'est non vide que dans deux cas de figure : premièrement lorsque pour tout i , $\mathcal{R}e(\lambda_i) > 1$, l'intersection vaut $\big] \max_{1 \leq i \leq 3n} \kappa_i, 0[$; deuxièmement lorsque pour tout i , $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 1$, l'intersection vaut $]0, \min_{1 \leq i \leq 3n} \kappa_i[$. Si le système présente des parties réelles situées de part et d'autre de 1, l'intersection est vide. $\square$

Les arguments développés²⁸ ici sur le taux de relaxation optimal sont identiques à ceux de [Quarteroni et al., 2007] [Chapitre 4.3.1]. On obtient le corollaire suivant :

Corollaire II.3. *Si les valeurs propres de $d_\Gamma f$ ont leurs parties réelles simultanément toutes strictement plus grandes que 1 ou simultanément toutes strictement plus petites que 1, alors il existe un η_{relax} , une boule B centrée en Γ et une norme qui rend $f_{\eta_{\text{relax}}}$ contractante sur B . Si de plus cette boule B est stable par $f_{\eta_{\text{relax}}}$, alors en initialisant avec n'importe quel $\Gamma^{\text{old}} \in B$, l'Algorithme 1 converge vers l'unique point fixe de f sur B .*

Démonstration. On choisit η_{relax} comme dans le Théorème II.3 selon que les parties réelles $\mathcal{R}e(\lambda_i)$ sont simultanément toutes strictement supérieures à 1 ou qu'elles soient simultanément toutes strictement inférieures à 1. On a ainsi $\rho(d_\Gamma f_{\eta_{\text{relax}}}) < 1$. Le rayon spectral est une fonction continue, donc il existe une boule B centrée en Γ telle que pour tout $\Gamma' \in B$, on a encore $\rho(d_{\Gamma'} f_{\eta_{\text{relax}}}) < 1$. Grâce au Lemme II.1, on dispose alors d'une norme $\|\cdot\|_\star$ sur $\mathbb{R}^{3n}$ telle que la norme subordonnée associée vérifie $\|d_{\Gamma'} f_{\eta_{\text{relax}}}\|_\star < 1$ pour tout $\Gamma' \in B$. L'inégalité des accroissements finis permet alors de conclure que $f_{\eta_{\text{relax}}}$ est contractante sur B . Si de plus B est stable par $f_{\eta_{\text{relax}}}$, alors toutes les hypothèses du théorème du point fixe de Banach-Picard sont réunies et donc l'Algorithme 1 converge vers l'unique point fixe de $f_{\eta_{\text{relax}}}$ sur B . Puisque les points fixes de f sont exactement les points fixes de $f_{\eta_{\text{relax}}}$, ceci conclut. $\square$

28. La théorie présentée ici s'apparente en effet à la méthode stationnaire de Richardson qui est spécifique à la résolution de systèmes linéaires mais qu'on peut étendre à des fonctions non linéaires grâce au théorème de Grobmann Hartman énoncé dans le livre de [Dedieu, 2006] [Chapitre 2.5].

II.5 Interprétation physique de la Jacobienne analytique

L'expression analytique de la Jacobienne établie dans la Proposition II.1 fait apparaître deux contributions distinctes pour chaque coefficient $\frac{\partial f_k}{\partial \Gamma_i}$:

1. **Le terme proportionnel à $C_L(\alpha_k, P_k)$** : Ce terme capture la variation de la portance due à la modification de la *pression dynamique*. Une variation de la circulation Γ_i dans le sillage induit une modification de la norme de la vitesse relative $\|\vec{u}_{\Pi_k}\|$ au point de Kutta.. Physiquement, cela représente l'accélération ou le ralentissement du flux d'air traversant la section de pale, modifiant la force de portance même si l'efficacité aérodynamique du profil restait constante.
2. **Le terme proportionnel à $\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$** : Ce terme représente la sensibilité du profil à la *torsion de l'écoulement*. La vitesse induite par le sillage ne change pas seulement la force du vent, mais aussi sa direction, et donc l'angle d'attaque α_k . Ce terme traduit le déplacement du point de fonctionnement sur la courbe polaire du profil. C'est ce terme qui est responsable des instabilités lorsque la pale opère proche du régime de décrochage, là où la pente de la polaire change brutalement.

Cette décomposition montre que la stabilité numérique de l'algorithme FVW dépend intrinsèquement du couplage entre la géométrie du sillage (via les vecteurs d'influence $\vec{\mathcal{F}}_i$) et les performances aérodynamiques locales du profil (via C_L et sa dérivée).

II.6 Complexité théorique

L'efficacité de la méthode Vortex repose sur l'équilibre entre la précision physique du sillage lagrangien et le coût computationnel des interactions de Biot-Savart. Nous analysons ici la complexité algorithmique cumulée sur l'ensemble d'une simulation de m pas de temps (durant laquelle le sillage s'allonge continuellement), en fonction du nombre de sections par pale n et de ce nombre total de pas m .

II.6.1 Coût de l'algorithme principal (Advection)

L'opération la plus coûteuse de l'algorithme principal (algorithme 2) est l'advection des nœuds du sillage. À un pas de temps q donné, le sillage s'est allongé pour contenir un nombre de nœuds $N_{nodes} \approx 3nq$ et un nombre de filaments $N_{fil} \approx 6nq$. L'application de la loi de Biot-Savart (Section I.2.2) nécessite une double boucle sur ces éléments, engendrant un coût de $\mathcal{O}(n^2q^2)$.

Pour évaluer le coût total à la fin de la simulation, il faut sommer ce coût sur la phase de croissance du sillage (de $q = 1$ à m) :

$$\mathcal{C}_{\text{advection_totale}} = \sum_{q=1}^m \mathcal{O}(n^2q^2) = \mathcal{O}\left(n^2 \sum_{q=1}^m q^2\right) = \mathcal{O}(n^2m^3) \quad (29)$$

Cette complexité globale, cubique par rapport au temps de simulation m , représente le véritable enjeu numérique du code, justifiant l'utilisation d'accélérateurs matériels (GPU) pour déporter cette tâche spécifique.

II.6.2 Coût du solveur de point fixe

La résolution du point fixe (algorithme 1) intervient à chaque pas de temps pour déterminer la circulation Γ_b sur $3n$ sections. Contrairement à l'advection, elle ne fait intervenir que le sillage proche (qui reste de taille fixe). La complexité cumulée sur la simulation s'obtient donc en multipliant simplement le coût itératif d'un pas par le nombre total de pas m .

Méthode de Picard Relaxée À chaque itération, le coût est dominé par l'induction du sillage proche sur les sections de la pale. Avec une moyenne de K_{pic} itérations par pas de temps, la complexité cumulée est :

$$\mathcal{C}_{\text{Picard_totale}} = \mathcal{O}(m \times K_{pic} \times n^2) \quad (30)$$

Méthode de Newton Analytique La méthode de Newton nécessite, outre l'évaluation du résidu, la construction et l'inversion de la matrice Jacobienne $J \in \mathcal{M}_{3n,3n}(\mathbb{R})$:

- Construction de J : Le calcul des influences géométriques unitaires est en $\mathcal{O}(n^2)$.
- Inversion du système : La résolution via une décomposition LU (`np.linalg.solve`) est en $\mathcal{O}(n^3)$.

La complexité totale cumulée sur l'ensemble de la simulation est donc :

$$\mathcal{C}_{\text{Newton_totale}} = \mathcal{O}(m \times K_{newt} \times n^3) \quad (31)$$

II.6.3 Synthèse et comparaison

La méthode de Newton présente une complexité $\mathcal{O}(n^3)$ par itération plus coûteuse que celle de Picard (en $\mathcal{O}(n^2)$) tout en requérant significativement moins d'itérations ($K_{newt} \ll K_{pic}$). Il y a donc un compromis entre coût par itérations et nombre total d'itérations à trouver.

De plus, le coût global du solveur de point fixe croît linéairement avec le temps de simulation ($\mathcal{O}(m)$), et devient donc strictement négligeable devant le coût d'advection du sillage qui explose de manière cubique ($\mathcal{O}(m^3)$). L'optimisation du solveur de point fixe ne représente qu'une fraction totalement marginale du temps total de simulation.

III Description de la méthode BEM

Cette annexe est un extrait du rapport de stage d'Arthur.

III.1 Introduction au modèle BEM

La *Blade element momentum* (abrégé en BEM) *theory* est un modèle dont les premières idées datent de la seconde moitié du XIX^e siècle. Elle permet de représenter et d'évaluer les performances d'une turbine à impulsion selon sa géométrie, ses paramètres mécaniques et ses interactions avec un fluide. Dans un premier temps, elle a été pensée pour modéliser différents phénomènes relatifs à l'aéronautique (notamment pour les avions et les hélicoptères). Par la suite, elle s'est avérée utile pour étudier les interactions de fluides sur des turbines extractrices (comme par exemple les éoliennes, l'objet de ce stage).

III.1.1 Historique du modèle

Ce modèle est issu de la combinaison de deux approches.

La première approche, la *Momentum theory*, fut proposée par William J.M. Rankine en 1865. Elle adopte un point de vue macroscopique du problème, en se penchant sur l'action d'une colonne de fluide sur une turbine. Cette approche fut reprise par Nikolay Joukowski, Frederick W. Lanchester et Albert Betz pour exhiber une limite théorique de l'efficacité maximale d'une turbine, connue sous le nom de *limite de Betz-Joukowski*.

Une deuxième approche, la *Blade element theory*, fut proposée en 1878 par William Froude, où les pales de la turbine sont discrétisées et l'action d'un fluide est directement étudiée à l'échelle d'un élément, donc à une échelle microscopique.

En 1926, Hermann Glauert propose de combiner les deux approches et d'ajouter un paramètre d'*induction tangentielle*, qui représente la force générée par le mouvement des pales après l'interaction avec le fluide. Ceci donna naissance à la *Blade element momentum theory*. Il s'agit d'un modèle simple et peu précis, ce qui le rend intéressant comme première approche d'un problème.

III.1.2 Présentation formelle du modèle

La BEM cherche à décrire les résultantes de l'écoulement d'un fluide sur une pale. Cette pale peut être, entre autres, celle d'une éolienne, celle de l'hélice d'un hélicoptère ou même celle de l'hélice d'un bateau. Les calculs différeront selon l'objet étudié.

La différence majeure entre les deux approches précédemment évoquées réside dans la région où l'interaction entre le fluide et la pale est étudiée. La première étudie l'interaction sur toute la turbine (à une échelle « globale ») et la seconde sur un seul élément (à une échelle « locale »).

Cadre et hypothèses On fait deux hypothèses sur l'écoulement de ce fluide. D'une part, il est considéré comme *incompressible*, *id est* que la masse d'une unité volumique de ce fluide est constante au cours de l'écoulement ; d'autre part, il est constant au cours du temps. Pour un écoulement constant au cours du temps, on parle d'écoulement *uniforme* ou *permanent*.

On note respectivement $U_{-\infty}$ et $U_{+\infty}$ la vitesse d'écoulement du fluide loin en amont et loin en aval de son contact avec la turbine, et on note U_0 la vitesse d'écoulement dans un voisinage autour du point de contact. On désignera ce voisinage par V .

On note Ω la vitesse de rotation de l'hélice, R le rayon d'une pale (considéré comme identique pour toutes les autres). Pour repérer la position d'un élément sur la pale, il suffit de disposer d'un réel $r \in [0, R]$, où R est le rayon de la pale.

En pratique, on contrôle Ω , et il est choisi de telle sorte qu'une certaine quantité, le *tip speed ratio* (abrégé en TSR), soit constante. Intuitivement, il s'agit d'une quantité décrivant la « bonne » vitesse de rotation à choisir pour l'hélice selon des configurations de vent différentes.

Formellement, on la définit comme suit : $TSR = \frac{\Omega R}{U_{-\infty}}$. On observe que le TSR est calculé sur l'élément situé au bout de la pale, ce qui laisse penser que l'on peut étendre cette mesure à n'importe quel élément. Ainsi, on définit le *local speed ratio* (abrégé en LSR) comme suit : $\lambda_r = \frac{\Omega r}{U_{-\infty}}$.

On observe que le LSR caractérise complètement la position de l'élément sur la pale, puisque l'écoulement est incompressible et que Ω est choisi selon cet écoulement. On se référera au LSR pour caractériser un élément plutôt qu'à r .

L'objectif du modèle est de décrire les variations infinitésimales du *couple* (noté dQ) — la force rotationnelle exercée par le rotor de la turbine — et de la *poussée* (notée dT) — la force exercée par le mouvement de l'éolienne — pour un élément d'épaisseur dr .

Approche globale L'approche globale établit une relation entre trois quantités d'intérêt : le facteur d'*induction axiale*, le facteur d'*induction tangentielle* et l'*angle de déviation relatif*, respectivement notés a , a' et φ .

L'induction axiale décrit la force du vent interagissant de face avec la pale, tandis que l'induction tangentielle représente la force engendrée par le mouvement des fluides, lui-même engendré par l'hélice. Ces deux quantités se définissent algébriquement comme

suit :

$$a := \frac{U_\infty - U_0}{U_\infty} , \quad a' := \frac{\omega}{2\Omega}$$

où ω est la vitesse de rotation de l'anneau de fluide (généré par le mouvement de l'hélice).

Quant à φ , l'angle de dérivation relatif, il s'agit de l'angle d'incidence entre la direction du vent arrivant face à la pale et la direction de la force produite par le mouvement de la pale au niveau d'un des éléments. On définit alors cet angle à partir de a, a' et de λ_r :

$$\tan(\varphi) = \frac{1 - a}{\lambda_r(1 + a')} \quad (32)$$

La poussée et le couple dépendent tous deux de la pression au niveau de la turbine, notamment de la pression exercée par l'écoulement au niveau de V . Commençons par brièvement introduire le principe de Bernoulli.

Nous avons déjà défini précédemment ce qu'était un fluide incompressible ; nous allons maintenant définir les notions de fluide parfait et de ligne de courant.

Définition III.1 (Fluide parfait). Un fluide est dit parfait si l'on peut décrire son mouvement indépendamment des effets de viscosité et de conduction thermique.

Ainsi, le mouvement d'un fluide parfait peut être décrit sans prendre en compte de résistances dans son écoulement ni sa capacité à transférer la chaleur sur une surface, ce qui le rend beaucoup plus simple à étudier. C'est une hypothèse que l'on prêtera aux fluides étudiés.

Définition III.2 (Ligne de courant). On appelle ligne de courant la courbe décrite par le mouvement d'un fluide et qui, à tout instant, possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des particules du fluide.

Autrement dit, toutes les lignes de courant sont des courbes de fonctions de classe C^2 des paramètres de temps et d'espaces.

Théorème III.1 (Principe de Bernoulli). *Lors de l'écoulement permanent d'un fluide parfait et incompressible, la quantité de Bernoulli ci-dessous est constante le long des lignes de courant, c'est-à-dire :*

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = c$$

où :

- p est la pression au point d'étude,
- ρ est la masse volumique du fluide,
- v est la vitesse d'écoulement,

- g est l'accélération gravitationnelle,
- z est l'altitude du point d'étude.
- c est un réel.

Revenons au modèle. On rappelle que V est un voisinage du point de contact de la trajectoire de l'écoulement avec la turbine. On définit p_- et p_+ la pression à gauche et à droite de cette dernière. Par application du principe de Bernoulli, on a :

$$\frac{U_{-\infty}^2}{2} + gz + \frac{p_-}{\rho} = c, \quad \frac{U_{+\infty}^2}{2} + gz + \frac{p_+}{\rho} = c$$

Ce qui donne :

$$\frac{U_{-\infty}^2}{2} - \frac{U_{+\infty}^2}{2} = \frac{p_-}{\rho} - \frac{p_+}{\rho}$$

Soit :

$$(A) \quad p_- - p_+ = \frac{\rho}{2}(U_{-\infty}^2 - U_{+\infty}^2)$$

On peut réexprimer le changement de pression sur ce voisinage. Que ce soit à gauche ou à droite de la pale, il s'agit de la densité du fluide multipliée par la vitesse d'écoulement sur V , soit :

$$\text{Gauche : } p_- = \rho U_0 U_{-\infty} \quad \text{Droite : } p_+ = \rho U_0 U_{+\infty}$$

Ainsi :

$$(B) \quad p_- - p_+ = \rho U_0 (U_{-\infty} - U_{+\infty})$$

On dispose d'une deuxième expression de la variation de pression dans V . De plus, par définition du facteur d'induction axiale, on a $U_0 = (1-a)U_{-\infty}$. En utilisant cette équation, (A) et (B), on trouve :

$$(C) \quad U_{+\infty} = (1-2a)U_{-\infty}$$

La poussée T peut être exprimée comme la somme nette des forces de chaque côté de la pale appliquée à toute l'hélice, soit $T = \pi r^2(p_- - p_+)$. En dérivant cette expression par rapport à r , il vient $dT = (p_- - p_+)2\pi r dr$. En substituant successivement (A) puis (C) dans la formule précédente, on obtient :

$$dT = \frac{\rho}{2} U_{-\infty}^2 4a(1-a)2\pi r dr$$

Et on pose $C_T(a) = 4a(1-a)$ pour simplifier la notation.

Développons autour de dQ . Cette quantité représente la vitesse du couple exercé par le rotor. On peut en déduire une expression en appliquant la loi de conservation du moment cinétique.

Dans le cas général, le *moment cinétique* d'un point matériel δ par rapport à un point O se comprend intuitivement par la quantité de mouvement du point M autour de O . La notion de moment est liée à une rotation d'un point autour d'un autre. Mathématiquement, on définit le moment du point M autour de O comme suit :

$$M(\delta) = \vec{r} \wedge \vec{p}$$

où $\vec{r}$ correspond à la position du point δ dans l'espace, $\vec{p} = m\vec{V}$, $\vec{V}$ est la vitesse du point δ et m sa masse.

Théorème III.2 (Conservation du moment cinétique d'un corps ponctuel). *La dérivée par rapport au temps du moment cinétique M est donnée par :*

$$\frac{dM(\delta)}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

En effet, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V}$, et comme par définition $\vec{p} = m\vec{V}$, il vient $\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = 0$. Cela traduit le fait que le couple du mouvement de δ correspond à l'accélération par unité de masse autour d'un point, c'est-à-dire exactement la deuxième loi de Newton : $\Sigma F = m\Sigma a$, la somme des forces est égale à la somme des accélérations multipliée par la masse.

Revenons sur le mouvement du rotor. On définit $Q = \Sigma C$: le couple total est égal à la somme des forces rotationnelles. Le moment cinétique d'un élément δ d'épaisseur dr situé à une distance r du nez de l'éolienne est $M(\delta) = \vec{r} \wedge m\vec{V} = mr^2\vec{\omega}$. La loi de conservation du moment cinétique induit $\frac{dM}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{\omega}r^2$ où $\frac{dm}{dt}$ est le débit massique de l'écoulement. Pour un élément situé à une distance r du nez du rotor et d'épaisseur dr , on a $\frac{dm}{dt} = \rho U_0 2\pi r dr$, car ρU_0 correspond à la quantité de particules s'écoulant et $2\pi r dr$ à la surface sur laquelle cet écoulement a lieu (voir page 98, équation (3.28) de [Manwell et al., 2009]).

Ainsi, il vient :

$$\frac{dM}{dt} = \rho U_0 \vec{\omega} 2\pi r^3 dr$$

et le couple correspond à la norme de l'expression ci-dessus. La norme du vecteur angulaire étant ω par définition, il vient finalement :

$$dQ = \rho U_0 \omega 2\pi r^3 dr$$

Comme $\omega = 2\Omega a' = 2\frac{\lambda_r}{r}U_{-\infty}$ (par définition du facteur d'induction tangentielle et du LSR), en substituant successivement ω , (B) puis (C) dans l'expression de dQ , il vient :

$$dQ = 4a'(1-a)\lambda_r U_{-\infty}^2 \rho \pi r^2 dr$$

Ce qui donne la "BEM globale", ou la *Momentum theory* :

$$dT = C_T(a)U_{-\infty}^2 \rho \pi r dr , \quad (33)$$

$$dQ = 4a'(1-a)\lambda_r U_{-\infty}^2 \rho \pi r^2 dr \quad (34)$$

basée sur le moment cinétique du couple et le principe de Bernoulli pour étudier les variations de pression sur V .

Approche locale Désormais, on se place sur une pale de la turbine, et plus précisément au niveau d'un élément particulier de LSR λ_r . On note U_{rel} l'écoulement relatif à r pendant que l'hélice tourne. Cet écoulement dépend de l'angle de dérivation φ , car il change de direction après son passage sur l'élément. On définit U_{rel} comme suit (voir [Ledoux et al., 2021] page 2600) :

$$\sin(\varphi) = \frac{U_0}{U_{rel}} \Leftrightarrow U_{rel} = \frac{U_0}{\sin(\varphi)} \quad (35)$$

Maintenant, parlons de portance et de traînée. Pour une géométrie de pale donnée, les fonctions de portance et de traînée (notées respectivement dL et dD) exercées sur un élément situé à une distance r du rotor et d'épaisseur dr sont définies comme suit :

$$dL = C_L(\alpha) \frac{1}{2} \rho U_{rel}^2 c_{\lambda_r} dr \quad (36)$$

$$dD = C_D(\alpha) \frac{1}{2} \rho U_{rel}^2 c_{\lambda_r} dr \quad (37)$$

où ρ est la densité du fluide, c_{λ_r} est le diamètre (au sens géométrique) de l'élément, dr l'épaisseur de l'élément. Les coefficients C_L et C_D sont respectivement les *coefficients de portance et de traînée*, et α est l'*angle d'attaque*, qui est l'angle de déviation de l'écoulement arrivant sur la pale (l'angle avec lequel l'écoulement « attaque » la pale). Ces deux fonctions ne dépendent d'aucune unité de mesure, elles sont adimensionnées, ce qui simplifie leur étude. La manière dont elles sont définies est décrite avec plus de précision aux pages 103-104 de [Manwell et al., 2009]. On définit cet angle comme suit :

$$\alpha = \varphi - \gamma_r$$

Où $\gamma_r \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, *twist* (ou *local pitch*), est l'angle d'orientation de l'élément sur l'axe de la pale.

Les coefficients C_L et C_D sont des fonctions de l'angle d'attaque dépendant de la discrétisation de la pale. Ils peuvent être calculés de plusieurs manières : soit ils sont la résultante d'une interpolation avec des données empiriques qui peuvent être récoltées

pendant des tests réalisés en soufflerie, soit ils sont calculés avec d'autres modèles plus complexes que la BEM, comme par exemple dans le *modèle Vortex* (sur lequel nous reviendrons plus tard).

Bien que C_L et C_D soient deux fonctions propres à une géométrie de pale, on peut noter qu'elles ont des propriétés générales que l'on peut décrire qualitativement.

Premièrement, C_L est croissante en α jusqu'à l'atteinte d'un angle critique $\alpha_s \in]0, \frac{\pi}{2}[$ après lequel elle décroît. Physiquement, cela traduit un phénomène de *décrochage*, c'est-à-dire que la portance décroît brusquement. Dans le cas d'un avion, une soudaine perte de portance entraînerait sa chute (et potentiellement sa perte), pour une éolienne cela diminuerait les rendements, étant donné que le bilan des forces exercées sur la turbine serait plus faible.

Deuxièmement, étant donné que C_D est une force de frottement, elle est toujours positive et définie (on les considère continues), pour tout angle d'attaque. Elle est presque linéaire en α sur $]0, \alpha_s[$, mais lorsque l'angle critique est atteint, elle augmente fortement.

On observe la chute de la portance et le caractère presque linéaire de la fonction de traînée avant d'atteindre l'angle critique.

Pour obtenir les équations de la *Blade elements theory*, l'idée est de combiner la portance et la traînée :

$$dF_N = dL \cos(\varphi - \theta_r) + dD \sin(\varphi - \theta_r) \quad (38)$$

$$dF_T = dL \sin(\varphi - \theta_r) - dD \cos(\varphi - \theta_r) \quad (39)$$

où θ_r est le *pitch local* et correspond à l'orientation de l'élément de rayon r sur l'axe de la pale (d'où l'application d'une matrice de rotation d'angle $\varphi - \theta_r$: pour pouvoir affiner le calcul des forces en prenant en compte une géométrie de pale non uniforme en termes de pitch). La force normale locale dF_N correspondant directement à la poussée dT et le torque exercé sur la pale vérifiant $dQ = BrdF_t$ (voir [Manwell et al., 2009] page 120-121), on en déduit les équations de la *Blade Element Theory* :

$$dT = \sigma_{\lambda_r} \frac{(1-a)^2}{\sin^2 \varphi} (C_L(\alpha) \cos \varphi + C_D(\alpha) \sin \varphi) U_{-\infty}^2 \rho \pi r dr, \quad (40)$$

$$dQ = \sigma_{\lambda_r} \frac{(1-a)^2}{\sin^2 \varphi} (C_L(\alpha) \sin \varphi - C_D(\alpha) \cos \varphi) U_{-\infty}^2 \rho \pi r^2 dr, \quad (41)$$

où $\sigma_{\lambda_r} = \frac{Bc_{\lambda_r}}{2\pi r}$ avec B le nombre de pales de la turbine.

Combinaison des approches Pour combiner les deux approches, il suffit de remarquer que l'on dispose de deux expressions différentes pour la poussée et le couple. En les mettant en équation et en effectuant quelques simplifications élémentaires, on obtient le système fermé suivant, qui consiste essentiellement en la BEM selon Glauert :

$$\tan(\varphi) = \frac{1 - a}{\lambda_r(1 + a')} \quad (42)$$

$$\frac{a}{1 - a} = \frac{\sigma_{\lambda_r}}{4\sin(\varphi)^2} (C_L(\varphi - \gamma_r)\cos(\varphi) + C_D(\varphi - \gamma_r)\sin(\varphi)) \quad (43)$$

$$\frac{a'}{1 - a} = \frac{\sigma_{\lambda_r}}{4\lambda_r\sin(\varphi)^2} (C_L(\varphi - \gamma_r)\sin(\varphi) - C_D(\varphi - \gamma_r)\cos(\varphi)) \quad (44)$$

Il existe plusieurs variantes de ce modèle. Celles décrites dans la section suivante sont celles qui ont été utilisées au cours de ce stage.

III.2 Mise en place de la BEM

En l'état décrit plus haut, la BEM est très peu précise. Depuis 99 ans, de nombreux modèles correctifs et techniques de résolution ont été mis en œuvre afin d'affiner la qualité de ses prédictions. Dans la présente section, on se propose un tour d'horizon des différents modèles correctifs utilisés. La dernière sous-section est réservée à une méthode de résolution de ce modèle, harmonisant les différentes corrections mobilisées.

III.2.1 Correction de Prandtl

L'objectif de la correction de Prandtl est d'ajouter à la BEM un paramètre permettant de prendre en compte des différences d'écoulement de flux selon la section de la pale étudiée.

Prandtl propose de représenter l'écoulement dans le sillage, en 3 dimensions, via des cercles (*material sheets*, voir [Branlard, 2017] page 232). Un azimuth du cercle correspond à un instant où la pale est passée. On suppose ici une symétrie azimuthale, c'est-à-dire que la solution calculée à l'angle azimuthal ϕ est la même qu'à l'angle $\phi + \frac{2\pi}{B}$ (B = le nombre de pales). Cette hypothèse est importante car dans un premier temps elle implique que le facteur de circulation calculé sur une pale sera le même pour toutes les autres (elles sont a priori identiques : même polaires et même géométrie). Dans un deuxième temps, cette hypothèse permet une réduction du problème de 3 à 2 dimensions.

Sur les figures 19, la partie pointillée des traits correspond aux cercles en perspective les moins opaques sur la figure 3D.

L'hypothèse de symétrie azimuthale établit une correspondance entre la $\frac{2\pi}{B}$ -périodicité sur la figure 3D et la translation de longueur s dans le plan, ce qui permet de simplifier suffisamment les calculs pour construire le modèle de circulation.

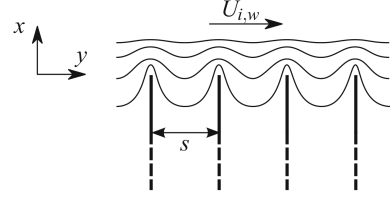
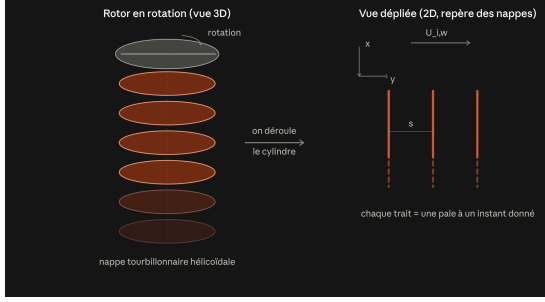


FIGURE 19 – Schémas illustrant la modélisation 3D ainsi que 2D. Le schéma de gauche a été généré avec **Claude Sonnet 5** et celui de droite est issu de [Branlard, 2017], page 232, et a servi à la génération du schéma.

Le deuxième enjeu est de passer d’une formulation planaire du problème vers une formulation profilare (voir 47). Mathématiquement, cela se traduit par l’application d’une certaine transformation à une partie du plan complexe $\mathbb{C}$. Une fois cette transformation opérée, on la recadrera dans le contexte induit par la géométrie de la pale de l’éolienne.

On se donne, sur un plan, une suite de feuilles séparées d’une distance s modélisant des instantanés du sillage. L’ensemble des points de ces feuilles est donné par

$$P_p = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x \in [-\infty, 0], y = ks, k \in \mathbb{Z}\} \quad (45)$$

$$= \mathbb{R}_- + is\mathbb{Z} \quad (46)$$

Pour $z = x + iy \in P_p$ avec $y = k\pi \frac{s}{\pi}$, on l’exponentie pour transformer les lignes en cercles :

$$e^{\frac{\pi z}{s}} = e^{\frac{\pi x}{s}} e^{\frac{i\pi y}{s}} = e^{\frac{\pi x}{s}} e^{ik\pi}$$

avec $e^{ik\pi} = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathbb{N} \\ -1 & \text{si } k \in -\mathbb{N} \end{cases}$. On remarque que par définition de z , on a $e^{\frac{\pi x}{s}} \in [0, 1]$, de fait l’exponentiation recouvre le segment $[-1, 1]$.

L’application permettant d’opérer la reformulation évoquée est connue sous le nom de *transformation de Joukowski* :

$$z = J(Z) = \frac{1}{2}\left(Z + \frac{1}{Z}\right) \quad (47)$$

L’application J est une transformation *conforme*, c’est-à-dire que c’est une bijection qui se comporte localement comme une *similitude* (polynôme de degré 1 à coefficients complexes conservant les angles). En tant que transformation conforme, la fonction J est holomorphe (on peut montrer qu’une fonction est holomorphe si et seulement si elle se

comporte localement comme une similitude à un $o(z)$ près).

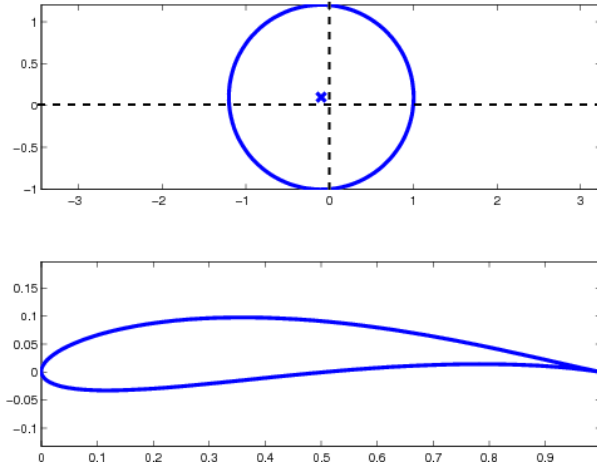


FIGURE 20 – Visualisation graphique de la transformation de Joukowski (figure issue de la page Wikipédia éponyme).

En appliquant la transformation de Joukowski aux cercles $e^{\frac{\pi x}{s}} e^{ik\pi}$, il vient

$$z = \frac{s}{\pi} \log(J(Z)) \quad (48)$$

où $\log$ est la détermination du logarithme népérien :

$$\log(re^{i\theta}) = \log(r) + i\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

À présent, on s'intéresse à la détermination de la vitesse de l'écoulement sur le cercle, que l'on appellera *la vitesse complexe*. La fonction de *potentiel complexe* $\mathcal{F}$ (que l'on peut comprendre comme le potentiel exprimé dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire le potentiel à chaque lieu du plan complexe) comme une fonction complexe dont la partie réelle est la fonction de potentiel ϕ et la partie imaginaire la fonction de flux ψ :

$$\mathcal{F}(Z) = \phi + i\psi$$

Pour un tourbillon centré à l'origine, le potentiel complexe est de la forme

$$\mathcal{F}(Z) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \log(Z) \quad (49)$$

où Γ est une constante à déterminer. On peut réexprimer la variable Z en fonction du potentiel complexe :

$$Z = e^{\frac{2\pi}{\Gamma} \mathcal{F}}$$

En injectant Z dans (47), il vient

$$z = \frac{S}{\pi} \log \left(\cos(e^{\frac{2\pi}{F}}) \right) \quad (50)$$

On peut maintenant déterminer le potentiel en fixant $\psi = 0$ (on se place sur une ligne de flux plate), ce qui mène à

$$\phi = \pm \arccos \left(e^{\frac{x\pi}{s}} \right) \quad (51)$$

Il existe plusieurs manières d'aboutir au facteur de perte nez/pointe. Une première approche consiste à regarder les variations de potentiel autour d'une des feuilles de partie imaginaire ks :

$$\phi_{ks+\epsilon} - \phi_{ks-\epsilon} = \epsilon \frac{2}{\pi} \arccos \left(e^{\frac{x\pi}{s}} \right) \quad (52)$$

et on pose

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos \left(e^{\frac{x\pi}{s}} \right) \quad (53)$$

qui consiste exactement en le facteur de perte nez/pointe. Il reste maintenant à le réécrire dans le contexte de la géométrie d'une pale d'éolienne. On note R la longueur d'une pale de l'éolienne, r le rayon d'un des éléments de la pale. On peut remplacer x par $-(R-r)$, ce qui donne

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos \left(e^{-\pi \frac{R-r}{s}} \right) \quad (54)$$

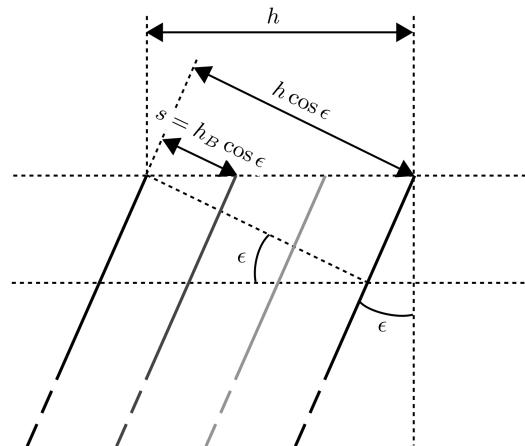


FIGURE 21 – Schéma illustratif permettant de calculer s [[Branlard, 2017]].

En se basant sur 21, on détermine $s = \frac{h(R)}{B} \cos(\epsilon(R))$, où $\frac{h(R)}{B}$ est la distance séparant

deux cercles consécutifs générés par 2 pales consécutives (voir figure 19), appelée *pitch apparent*, et $\epsilon(R)$ est l'angle d'orientation de la pale sur son axe, appelé *angle de pitch*.

La valeur h est à comprendre comme le *pitch* de la pale et ϵ l'angle de flux (i.e φ). On peut écrire h et s en fonction de R et r :

$$h(r) = 2\pi r \tan(\epsilon(r)) \quad s = \frac{2\pi R}{B} \sin(\epsilon(R)) \quad (55)$$

En faisant l'hypothèse que la vitesse relative est égale à la vitesse dans le sillage, soit une hypothèse d'uniformité de la vitesse dans le sillage, on obtient $\epsilon(R) = \phi(R)$ (ϕ est l'angle d'écoulement du flux dans le sillage). En injectant ces expressions dans (53), il vient :

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos \left(\exp \left[\frac{-B}{2} \frac{R-r}{R} \frac{1}{\sin(\varphi(R))} \right] \right)$$

Pour les sections proches de la pale, on peut faire l'hypothèse $R \sin(\varphi(R)) \approx r \sin(\varphi(r))$. Cette approximation, considérée comme tout à fait convenable, est évoquée par Glauert. Ceci mène à la formule finale de la correction de la perte en bout de pale :

$$F = \frac{2}{\pi} \arccos \left(\exp \left[\frac{-B}{2} \frac{R-r}{r} \frac{1}{\sin(\varphi(r))} \right] \right) \quad (56)$$

Et on peut construire de la même façon l'analogue en nez de pale. Ce qui mène à ce que l'on pourrait appeler la correction de perte en bout de pale et nez de pale (le modèle *hub/tip loss* Prandtl et de Glauert) :

$$F_{hub} = \frac{2}{\pi} \arccos \left(\exp \left[\frac{-B}{2} \frac{R_{tip}-r}{r} \frac{1}{\sin(\varphi(r))} \right] \right) \quad (57)$$

$$F_{tip} = \frac{2}{\pi} \arccos \left(\exp \left[\frac{-B}{2} \frac{r-R_{hub}}{R_{hub}} \frac{1}{\sin(\varphi(r))} \right] \right) \quad (58)$$

où R_{hub} désigne le rayon du moyeu (nez de la pale) et R_{tip} la longueur totale de la pale.

III.2.2 Angle de déviation du sillage et angle de yaw

Angle de sillage L'angle de sillage χ est l'angle avec lequel le tourbillon engendré par le mouvement de l'hélice dévie lorsque que le vent n'arrive pas de face sur le rotor. L'angle avec lequel le vent rencontre la pale s'appelle le *yaw* et est noté γ .

De la figure ci-dessus, il découle la formule

$$\tan(\chi) = \frac{\sin(\gamma) - a \tan(\frac{\chi}{2})}{\cos(\gamma) - a}$$

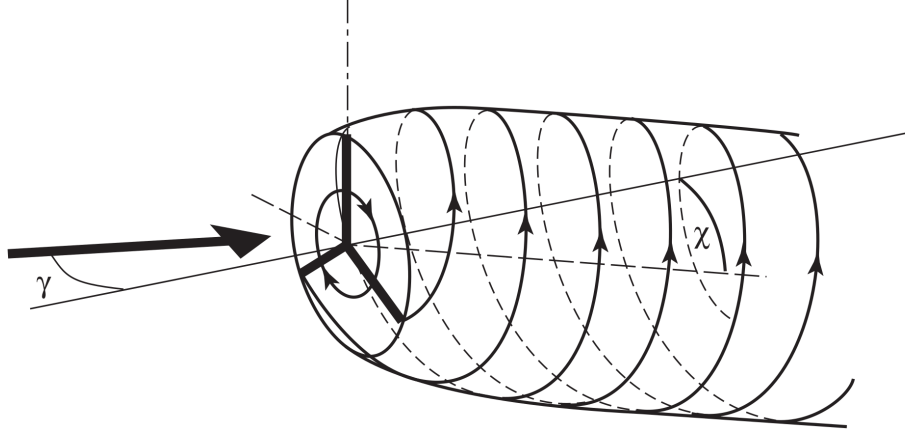


FIGURE 22 – Schéma illustrant γ et χ , issu de [Burton, 2001].

En faisant les approximations (qui proviennent des développements limités des fonctions trigonométriques) $\cos(\gamma) \approx 1$, $\sin(\gamma) \approx \gamma$ et $\tan(\chi) \approx \chi$, on en déduit la relation approchée

$$\chi \approx (1 + 0.5a)\gamma$$

qui permet de calculer l'angle de sillage en fonction de a et de γ .

Angle de Yaw et correction de l'induction axiale Un premier modèle prenant en compte le yaw est celui qui considère une vitesse en 2 dimensions, c'est-à-dire

$$\vec{U} = (U_x, U_y)$$

avec

$$\begin{aligned} U_x &= U_{-\infty} \cos(\gamma) \\ U_y &= U_{-\infty}(\Omega r - \sin(\gamma) \cos(\phi)) \end{aligned}$$

où ϕ correspond à l'angle d'azimut de l'élément de rayon r dans le cercle décrit par la rotation de la turbine. On peut aller plus loin.

Un deuxième modèle beaucoup plus sophistiqué, proposé par Dale Pitt et David Peters (voir [Pitt and Peters, 1981] et [Burton, 2001] pages 100 à 130), donne un rôle plus important au yaw. Tout commence avec Hermann Glauert lorsqu'il s'intéressait à l'aérodynamique des gyrocoptères, un aéronef doté d'un moteur à hélice ainsi que d'un rotor complètement indépendant du moteur. Lorsque l'appareil démarre, il parcourt une certaine distance au sol sur laquelle son rotor s'incline afin d'amorcer sa rotation et de pouvoir générer la portance nécessaire au décollage de l'appareil.

Quel rapport avec les éoliennes à yaw ? Ce sont en fait les mêmes principes physiques qui sont appliqués ! Dans un gyrocoptère, l'induction axiale ne peut pas être uniforme. C'est ainsi que Glauert proposa une modification de la BEM pour rendre compte d'une induction axiale non uniforme, à la fois sur la pale et sur son cercle de révolution. Pour a l'induction axiale uniforme, l'induction non uniforme de Glauert, notée a_G , s'écrit

$$a_G = a(1 + K \frac{r}{R} \sin(\phi)) \quad (59)$$

où ϕ désigne l'angle d'azimut, R la longueur de la pale, $r \in [0, R]$ le rayon d'une section de pale et K un paramètre sur lequel nous allons revenir. L'idée est de donner une contribution plus importante aux éléments en bout de pale, ce qui est intéressant du fait que les efforts exercés sur la pale sont radicalement différents au pied et à la pointe.

De même, le terme en ϕ permet d'induire des différences de contribution selon la position azimutale de l'élément. En aéronautique, une convention veut que le degré azimutal 0 correspond au degré 90 du cercle trigonométrique usuel. Ainsi, ce modèle propose une distribution uniforme sur la pale lorsqu'elle est alignée sur le pylône, et une distribution accentuée lorsqu'elle lui est presque perpendiculaire.

Pour en revenir à Pitt et Peters, leur modèle consiste à choisir le paramètre K en fonction du yaw. Il est déterminé en résolvant une équation reliant la série de Fourier de l'induction axiale selon l'azimut et la formule ci-dessus, et donne

$$(P\&P) : a_G = a(1 + \frac{15\pi}{32} \frac{r}{R} \tan(\frac{\chi}{2}) \sin(\phi)) \quad (60)$$

Frédéric Blondel ([Blondel et al., 2024]) a participé à l'élaboration d'un autre modèle, basé sur 60 en ajoutant 3 paramètres déterminés empiriquement sur les sorties du solveur haute fidélité du modèle Free Vortex Wake de l'IFPEN, CASTOR. Ce modèle correctif est

$$(IFP) : a_{IFP} = [1 + k_1(\frac{r}{R}) \frac{r}{R} \tan(\frac{\chi}{2}) \sin(\phi + \psi_1) + k_2(\frac{r}{R})(1 - \frac{r}{R}) \tan(\frac{\chi}{2}) \sin(\phi + \psi_2)] \quad (61)$$

où

$$k_1(\frac{r}{R}) = (1 - A_0) + A_0 \frac{r - r_{hub}}{R - r_{hub}}$$

$$k_2(\frac{r}{R}) = 1 - A_0 \frac{r - r_{hub}}{R - r_{hub}}$$

Les 3 paramètres modulables sont les deux phases ψ_1 et ψ_2 , dont les valeurs sont respectivement fixées par défaut à $-\frac{\pi}{9}$ et à π , et A_0 fixé à 0.35.

III.2.3 Correction de Buhl

Comme expliqué précédemment, la BEM est un assemblage de la *Blade Theory* (abrégée en BT) et de la *Momentum Theory* (abrégée en MT), mais cette fusion n'a pas lieu sans quelques problèmes conceptuels. De manière empirique, Lock et Glauert ont observé que la relation entre le coefficient de poussée C_T et l'induction axiale a proposée par la MT devenait trop éloignée de la réalité pour des valeurs d'induction axiale approximativement supérieures à 0.5. La valeur exacte du seuil, inconnue à ce jour, est notée β .

Glauert a ainsi proposé une modification de la relation pour des valeurs d'induction axiale supérieures à β , basée sur ses observations empiriques, pour coller aux données expérimentales. Cette modification n'a pas été pensée pour prendre en compte le facteur F du modèle *hub/tip loss*, et a le mauvais goût d'empirer la discontinuité du problème.

Sur des données empiriques récupérées par Lock, il est montré que la MT échoue à reproduire les données empiriques pour des valeurs d'induction axiale supérieures à β . Ces états de la BEM sont désignés par *Turbulent Windmill State* et correspondent à des états de fortes perturbations au moment du démarrage et de l'arrêt de la turbine.

Dans la *Momentum Theory*, la relation entre C_T et a est la suivante :

$$C_T = 4a(1 - a)F$$

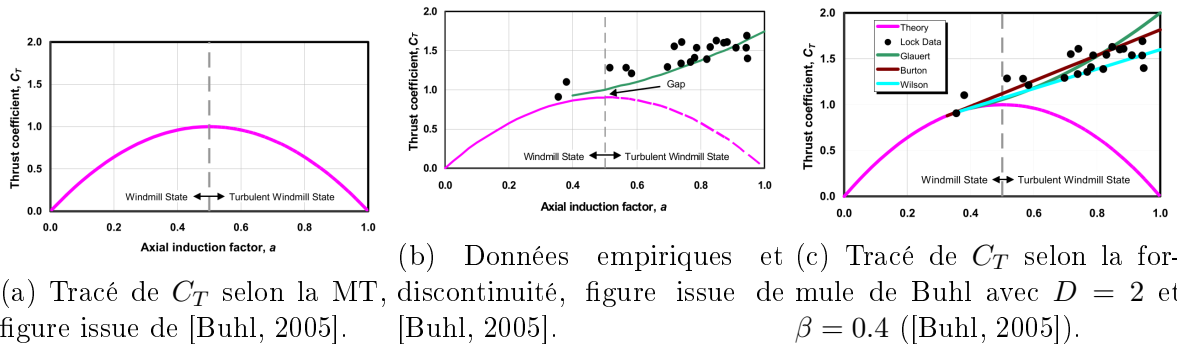


FIGURE 23 – Tracé de C_T face aux données empiriques (pointillés) et illustration de la discontinuité sans *hub/tip loss*.

Buhl ([Buhl, 2005]) a proposé une formule d'interpolation polynomiale basée sur les observations empiriques afin de reproduire les données expérimentales. À F fixé, l'idée est de trouver les coefficients d'un polynôme P de degré 2 tels que :

- (I) $\lim_{a \rightarrow \beta^-} P(a) = \lim_{a \rightarrow \beta^+} C_T(a)$ où C_T est la poussée au sens de la MT
- (II) $\lim_{a \rightarrow \beta^-} \frac{dP}{da}(a) = \lim_{a \rightarrow \beta^+} \frac{dC_T}{da}(a)$
- (III) $P(1) = D$

La condition (III) doit permettre d'approcher au mieux les observations empiriques ; pour que le problème s'adapte à plusieurs jeux d'observations différents, on note D une

approximation de ces données pour $a = 1$. Les conditions (I) et (II) ont pour but de prolonger par continuité C_T tout en respectant au mieux la condition (III).

Le problème est assez simple à résoudre. On dispose de 3 conditions pour identifier les 3 coefficients d'un polynôme de degré 2. Ceci se résume au travers du système suivant :

$$P(\beta) = C_T(\beta) \quad (62)$$

$$\frac{dP}{dX}(\beta) = \frac{dC_T}{da}(\beta) \quad (63)$$

$$P(1) = D \quad (64)$$

Qu'il suffit de résoudre pour obtenir le prolongement souhaité. Dans le cas d'une BEM prenant en compte une déviation dans le sillage, la variation de la force normale selon une variation de la position de l'élément étudié se réécrit

$$dT = \rho U_{-\infty}^2 4a(\cos(\gamma) - a) \pi r dr$$

ce qui induit une réécriture de la formule de C_T

$$C_T(a) = 4a(\cos(\gamma) - a)F$$

et couvre le cas sans déviation, i.e quand $\gamma = 0$ (voir [Burton, 2001]).

III.2.4 Algorithme de Ning non couplé

L'algorithme de Ning non couplé, proposé par le physicien Andrew Ning ([Ning, 2014]), est une méthode permettant de résoudre la BEM en ramenant le système d'équations fermé 44 à un problème de recherche de racine d'une certaine fonction à une variable, que l'on appelle *fonction résiduelle* et que l'on notera f .

L'un des avantages de cette méthode est celui de pouvoir retourner, quel que soit le régime, une solution.

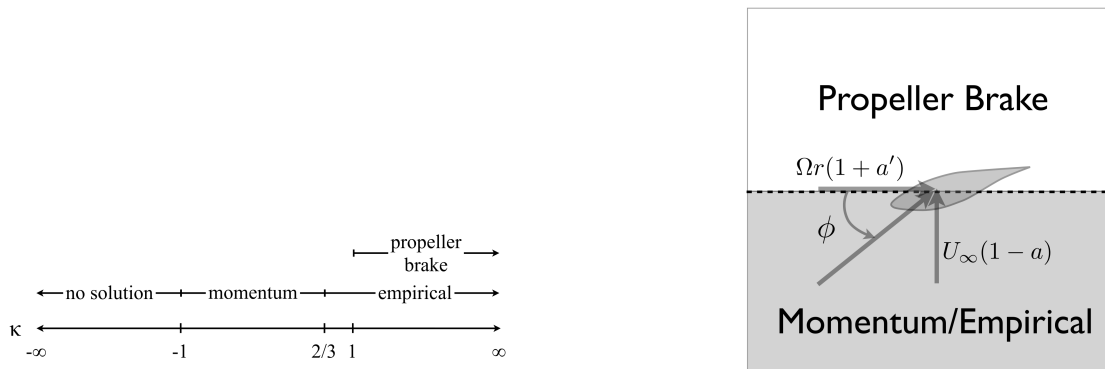


FIGURE 24 – Illustrations des différents régimes possibles (issues de [Ning, 2014]).

Notons que dans la BEM, on peut complètement caractériser les inductions axiale et tangentielle en fonction de φ . La fonction résiduelle sera donc une fonction de φ . Mettons tout cela en forme.

Dans un premier temps, il nous faut exprimer l'induction axiale en fonction de φ tout en considérant le seuil β introduit dans la correction de Buhl. En partant de l'équation BEM avec un facteur de circulation F (calculé avec le modèle de Prandtl, voir la correction de Prandtl), on a dans la *momentum region* ($\varphi \leq \beta$) :

$$\frac{a}{1-a} = \frac{\sigma_{\lambda_r}}{4F(\varphi)\sin(\varphi)^2} c_n(\varphi)$$

où $c_n(\varphi) = C_L(\varphi - \gamma_r) \cos(\varphi) + C_D(\varphi - \gamma_r) \sin(\varphi)$ est le coefficient de force normale au niveau de la section de rayon r . En introduisant $\kappa(\varphi) = \frac{\sigma_{\lambda_r}}{4F(\varphi)\sin(\varphi)^2} c_n(\varphi)$, on exprime a en fonction de κ :

$$a(\varphi) = \frac{\kappa(\varphi)}{\kappa(\varphi) + 1}$$

Et ainsi, pour des valeurs de $a \leq \beta$, l'expression ci-dessus de κ est valide dans la région $\left[-1, \frac{\beta}{1-\beta}\right]$

Pour ce qui est de la région empirique, l'expression dépendra beaucoup de la manière dont on prolonge le coefficient de poussée C_T au-delà de β . Le choix d'un prolongement C^1 semble judicieux, étant donné que l'on veut utiliser un algorithme de recherche de racine et que certains d'entre eux exigent une régularité minimale (comme la méthode de Newton par exemple).

La marche à suivre est la même que celle utilisée pour trouver κ dans la momentum region : il faut écrire la relation entre le C_T prolongé et le C_T de la BET. En guise d'exemple, si l'on fixe $\beta = 0.4$ et $D = 1$, le bon prolongement de C_T est

$$C_T(a) = \left(\frac{50}{9} - 4F\right)a^2 - \left(\frac{40}{9} - 4F\right)a + \frac{8}{9}$$

et permet d'aboutir à

$$a(\varphi) = \frac{\gamma_1 - \sqrt{\gamma_2}}{\gamma_3}$$

avec $\gamma_1 = 2F\kappa(\varphi) - (\frac{10}{9} - F)$, $\gamma_2 = 2F\kappa(\varphi) - F(\frac{4}{3} - F)$, $\gamma_3 = 2F\kappa(\varphi) - (\frac{25}{9} - 2F)$

Pour les phases de décrochage, c'est-à-dire pour des valeurs d'induction axiale supérieures à 1, la BET propose de considérer la même formule mais avec le signe opposé (dans un état de décrochage, le rotor ne tourne plus, donc a une poussée négative), ce qui donne

$$a(\varphi) = \frac{\kappa(\varphi)}{\kappa(\varphi) - 1}$$

et est valable dès que $\kappa \geq 1$. Pour résumer, on peut écrire le facteur d'induction axiale comme une fonction de φ de la manière suivante :

$$a(\varphi) = \begin{cases} \frac{\kappa(\varphi)}{\kappa(\varphi)+1} , & a \in [\beta - 1, \beta] \\ \Gamma(\varphi) , & a \in]\beta, 1[\\ \frac{\kappa(\varphi)}{\kappa(\varphi)-1} , & a \geq 1 \end{cases}$$

où Γ désigne une fonction dépendant du choix du prolongement pour la région empirique.

Quid de la fonction résiduelle ? Nous disposons de pas mal de marge de manœuvre sur ce choix, et certaines options sont meilleures que d'autres. Le choix dépend également du prolongement de C_T . De manière générale, il est bon de la choisir de sorte qu'elle ait ses singularités en 0 et en $\pm\pi$, afin de coïncider avec les changements de régime. Un bon choix dans le cas du prolongement de Buhl est le suivant :

$$f(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{1 - a} - \frac{\cos(\varphi)}{\lambda_r(1 + a')}$$

En principe, la résolution de l'équation $f(\varphi) = 0$ admet toujours une solution. Étant donné qu'elle est déterminée à partir de la relation tangentielle entre φ , a et a' , elle permet également de trouver une solution dans le régime de décrochage.

IV Présentation de l'éolienne New Mexico

Cette annexe est un extrait du rapport de stage d'Arthur.

IV.1 Une éolienne d'intérieur

Le projet Mexico (pour *Model EXperiments In Controlled Condition*, [Boorsma et al., 2018] et [Snel et al., 2007]) est le fruit d'une collaboration internationale (Europe, USA, Chine, Japon et Israël) démarrée en 2006 puis achevée en 2007, dont le but était de créer des données aérodynamiques de référence pour un large éventail de valeurs de vent. Disposer de telles données a servi à tester et à améliorer différents modèles aérodynamiques, liés à la BEM comme des modèles CFD. Un exemple de résultats est disponible dans la Figure 28.

Des données ont été faites pour 5 valeurs de vents, allant de 10 à 30 [m/s], 4 angles de yaw allant de 0 à 45 [deg], et cela pour des vitesses en bout de pale variant entre 100 et 76 [m/s] et différentes valeurs de pitch, allant de -2.3 à 5 [deg]. La densité de l'air utilisée est $\rho = 1.198$ [kg/m³], celle mesurée en soufflerie.

L'envergure des pales de l'éolienne est de 2.25 mètres de long (voir la Figure 29), et trois profils de pale ont été utilisés :

- DU91-W2-250
- RISOE-A1-21
- NACA 64-418

ainsi que différents profils mineurs de transition entre chacun des trois cités ci-dessus. Ils sont dessinés dans la Figure 26. À chacun de ces profils est associée une liste de C_L et C_D sur une discrétisation de 720 degrés d'angle d'attaque uniformément répartis sur $[-180, 180]$ [deg]. Ils sont tracés sur la plage $[-90, 90]$ [deg] dans la Figure 27. Ces angles d'attaque sont calculés selon différentes méthodes, basées sur différents modèles aérodynamiques (voir [Boorsma et al., 2018] page 63).

IV.2 Distribution des rayons, lignes de cordes et des angles de vrillages

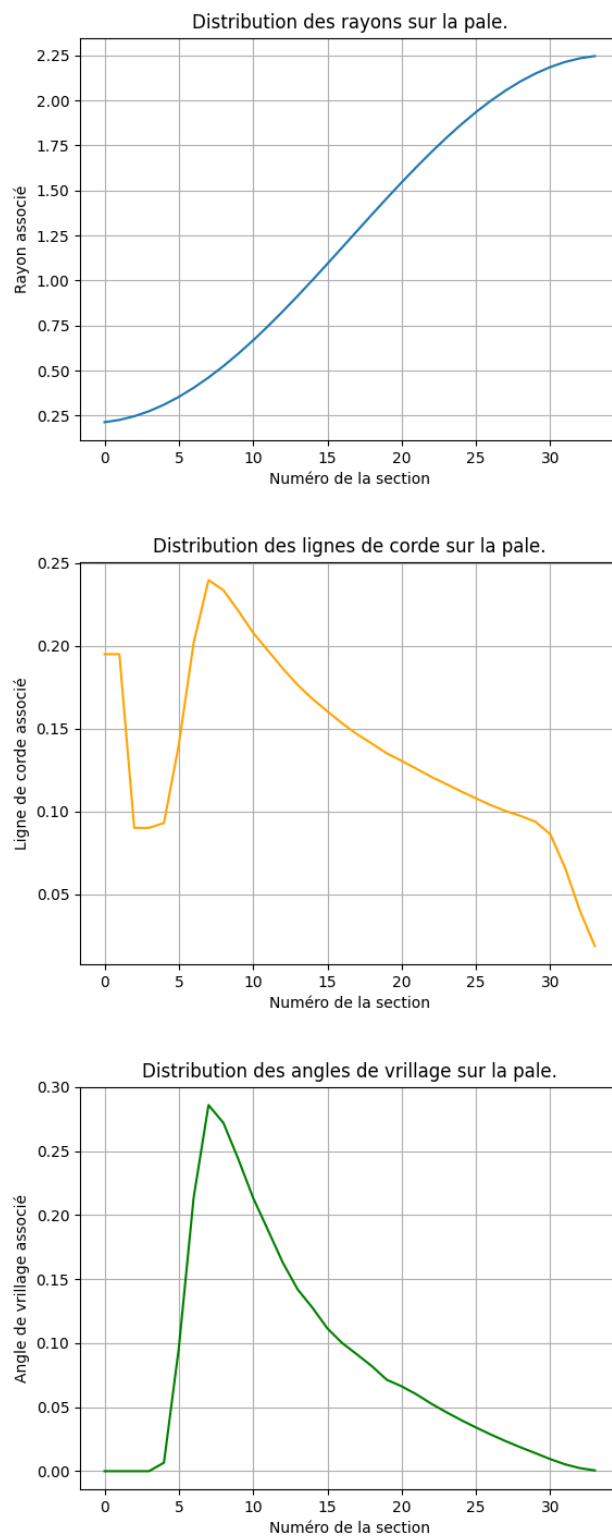


FIGURE 25 – Distribution des rayons, lignes de corde et angle de vrillage sur la pale.

IV.3 Graphiques des profils et des polaires

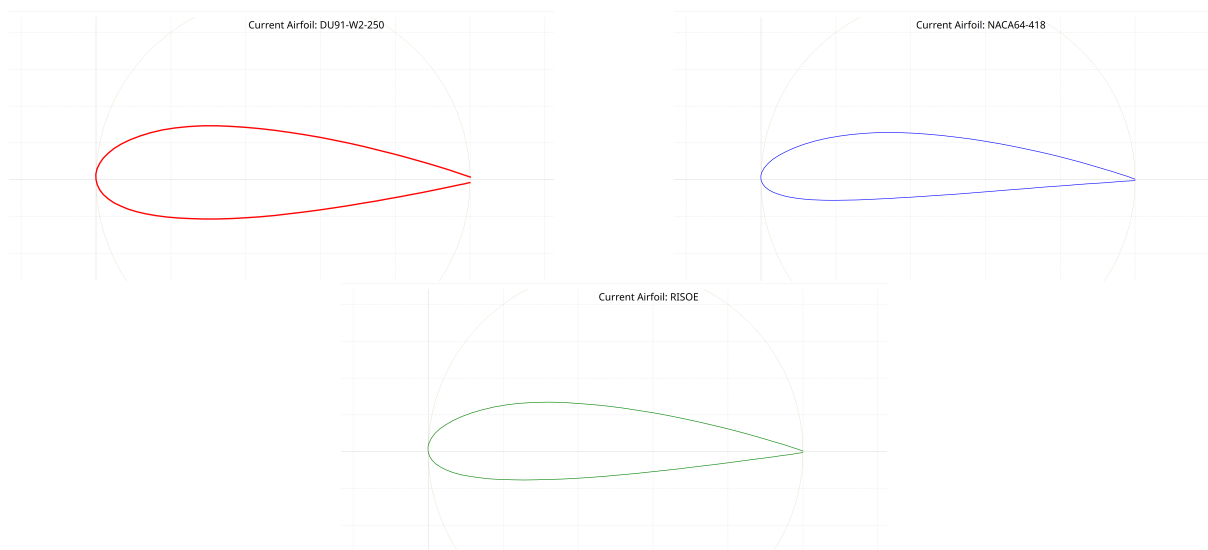


FIGURE 26 – Profils de DU91, NACA64 et RISOE.

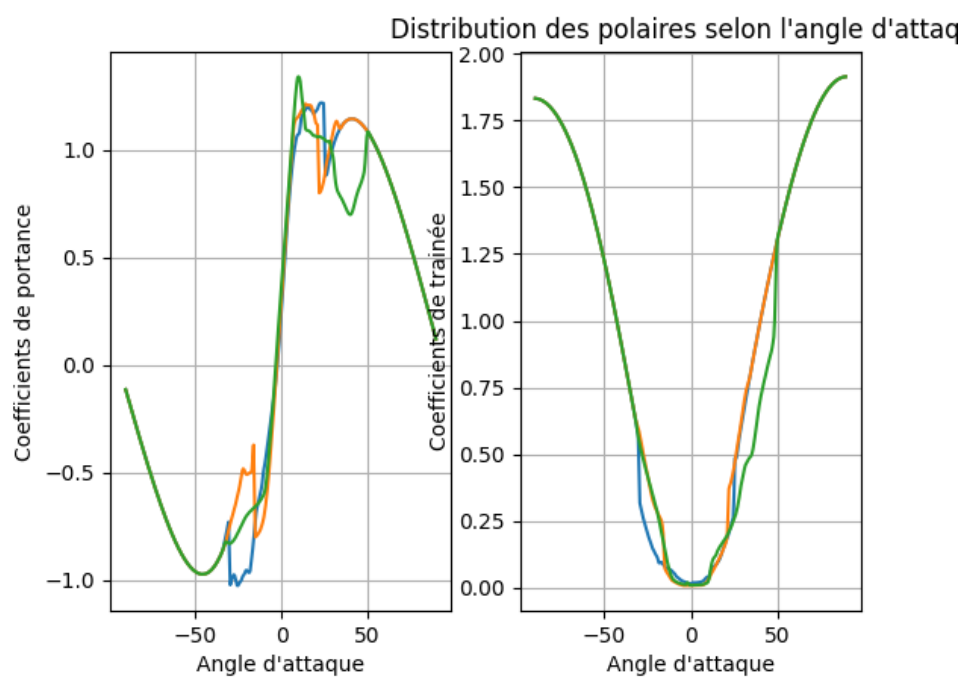


FIGURE 27 – Graphiques des polaires associées à chaque profil.



FIGURE 29 – Photo de l'éolienne New Mexico, tirée de [Boorsma et al., 2018].

IV.4 Comparaison graphique entre les différents solveurs et les données expérimentales

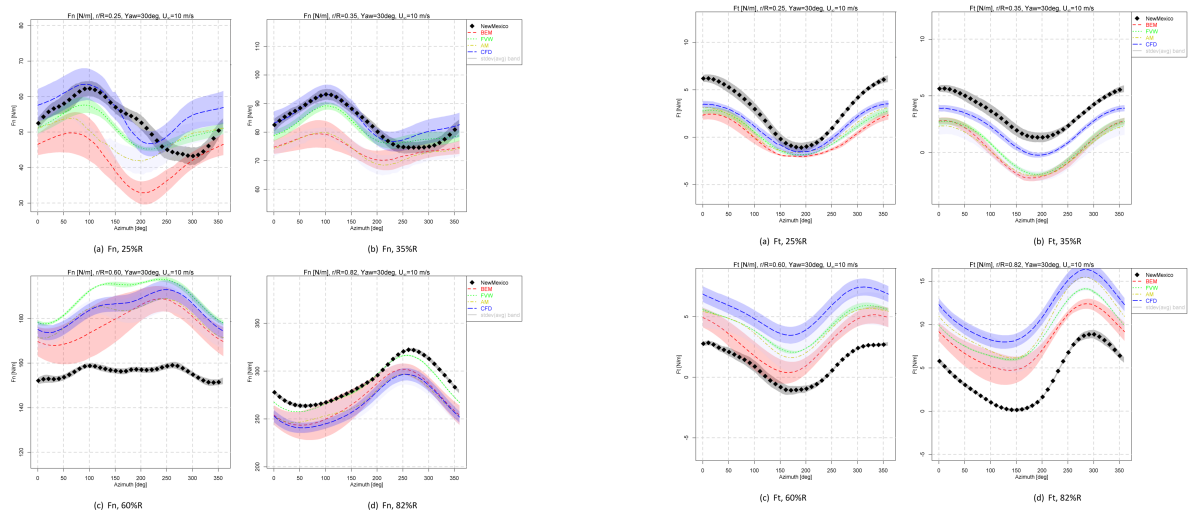


FIGURE 28 – Tests des solveurs contre les données expérimentales sur les efforts (normaux et tangentiels) en fonction de l'azimut à 25, 35, 60 et 82% de l'envergure de la pale (voir [Boorsma et al., 2018], page 35).

V Formalisation et architecture des modèles prédictifs

Cette annexe présente de manière exhaustive le formalisme mathématique, les topologies de réseaux de neurones, les processus de normalisation ainsi que la formulation des fonctions de perte et des métriques d'évaluation. Les stratégies se déclinent selon plusieurs axes : la structure topologique (**GV** vs **GM**), le mode d'intégration de la BEM (**0**, **1**, **2**, **2+**), la nature des variables intermédiaires (**f** : **Force** vs **v** : **Vitesse**), la variante de calcul de la BEM utilisée en entrée (**DUM**, **IFP**, **P&P**) et la proportion de données d'entraînement (**PX**). L'ensemble de la nomenclature des modèles est détaillé en Section V.4.1.

Elle est organisée en cinq temps : la formulation du problème et les grandeurs manipulées, les architectures de réseaux, la chaîne physique différentiable et la fonction de perte, le protocole d'apprentissage, et enfin les métriques d'évaluation.

V.1 Formulation du problème : variables, adimensionnement et intégration de la BEM

V.1.1 Grandeurs physiques et adimensionnement

Vitesse apparente V_{app} . La vitesse apparente en un nœud (r, θ) est la norme de la vitesse relative vue par la section de pale en rotation dans un écoulement désaligné d'angle de lacet γ , projetée dans le plan local $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ de la section. En notant $u_\infty = \Omega R / \text{TSR}$ la vitesse de vent de référence, elle s'écrit :

$$V_{\text{app}}(r, \theta, \gamma, \text{TSR}) = \sqrt{u_\infty^2 + (\Omega r)^2 - 2 u_\infty \Omega r \sin \gamma \cos \theta - (u_\infty \sin \gamma \sin \theta)^2} \quad (65)$$

où Ω est la vitesse angulaire de la turbine et r le rayon local du nœud. Cette grandeur sert au dénominateur d'adimensionnement.

Pression dynamique locale D . La pression dynamique locale D constitue le dénominateur de normalisation des efforts aérodynamiques (stratégie **_f**) :

$$D(r, \theta, \gamma, \text{TSR}) = \frac{1}{2} \rho V_{\text{app}}^2(r, \theta, \gamma, \text{TSR}) |c(r)| \quad (66)$$

où ρ est la masse volumique de l'air et $c(r)$ la corde locale interpolée sur la géométrie de pale. Les forces normalisées sont donc les coefficients F_n/D et F_t/D , adimensionnels et de l'ordre de l'unité sur l'ensemble du disque.

Coordonnées cartésiennes de vitesse (a_n, a_t) . Pour la stratégie **_v**, on ne travaille pas directement dans la base polaire (V_{eff}, α) issue du solveur BEM/SVEN, car le réseau

de neurones pourrait ne pas comprendre que $\alpha = 0$ et $\alpha = 360$ sont les mêmes angles. On projette plutôt le vecteur vitesse effectif dans la base cartésienne locale $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$ de la section de pale, où $\mathbf{n}$ est la direction normale à la corde et $\mathbf{t}$ la direction dans le plan de rotation, puis on adimensionne par V_{app} :

$$a_n = \frac{V_{\text{eff}} \sin \alpha}{V_{\text{app}}} \quad (67)$$

$$a_t = \frac{V_{\text{eff}} \cos \alpha}{V_{\text{app}}} \quad (68)$$

Ces coordonnées cartésiennes adimensionnées vérifient $\|(a_n, a_t)\| = V_{\text{eff}}/V_{\text{app}}$ et encodent simultanément la norme et l'angle d'attaque de manière différentiable. La reconstruction inverse s'écrit :

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{app}} \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{a_n}{a_t}\right) \quad (69)$$

Normalisation et dénormalisation. Pour stabiliser le conditionnement du gradient, toutes les variables subissent une standardisation centrée-réduite via un `StandardScaler`. Pour la stratégie `_f`, la normalisation porte sur les coefficients F/D (déjà adimensionnels) ; pour la stratégie `_v`, elle porte directement sur les coordonnées (a_n, a_t) . Soit V une variable à normaliser :

$$V_{\text{norm}} = \frac{V - \mu_V}{\sigma_V} \quad (70)$$

La transformation inverse est implémentée de manière différentiable par `TorchScaler` :

$$V = V_{\text{norm}} \times \sigma_V + \mu_V \quad (71)$$

V.1.2 Topologies d'entrée-sortie : stratégies GV et GM

Le disque du rotor est discrétisé sous la forme d'une grille polaire de dimensions $N_r \times N_\theta$, où chaque nœud est repéré par son rayon local r et son azimuth θ . À chaque nœud sont associées les conditions de fonctionnement globales – le *yaw* γ et le *Tip Speed Ratio* TSR – ainsi que les efforts axiaux et tangentiels estimés par la théorie BEM classique $(F_n^{\text{BEM}}, F_t^{\text{BEM}})$, ou les vitesses associées $(V_{\text{eff}}^{\text{BEM}}, \alpha^{\text{BEM}})$ selon l'intermédiaire choisi.

Deux topologies d'entrée/sortie sont considérées : un **vecteur global aplati** (stratégie **GV**) traité par un perceptron multicouche, et une **carte 2D multicanale** (stratégie **GM**) traitée par un réseau convolutif respectant la périodicité azimuthale de la grille. Pour modéliser la nature cyclique du rotor, une couche de padding périodique (`PeriodicPadding2d`) est utilisée par tous les blocs convolutifs :

- Axe Azimutal (θ , axe W) : *circular padding*, garantissant que $\theta = 360$ soit géométriquement adjacent à $\theta = 0$.
- Axe Radial (r , axe H) : *replicate padding* aux frontières physiques du pied et du

bout de pale.

Stratégie GV (globale vectorielle). L'échantillon d'apprentissage est constitué de paires $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ obtenues par groupement par couple (γ, TSR) , chaque groupe étant trié par (θ, r) puis aplati. La cible $\mathbf{y}^{\text{GV}} \in \mathbb{R}^{2N_r N_\theta}$ est le vecteur aplati des sorties. Le réseau associé est le `TurbineMLP`. En mode sans auto-encodeur (D0), la sortie est le vecteur de taille $2N_r N_\theta$. Avec un auto-encodeur de dimension latente d , le réseau prédit $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$ qui est ensuite décodé via `LinearAutoencoder` ou `ConvolutionalAutoencoder`.

Stratégie GM (globale matricielle). La topologie bidimensionnelle est nativement préservée : l'entrée et la sortie sont des cartes $\mathbb{R}^{C \times N_r \times N_\theta}$, traitées par convolutions. Pour chaque couple (γ, TSR) , la grille est triée par (r, θ) puis réorganisée en image $(2, N_r, N_\theta)$. L'entrée est une image multicanale constituée de la carte BEM et de canaux constants encodant γ et TSR. Le réseau associé est le `TurbineCNN`. En mode D0, la sortie est une carte $2 \times N_r \times N_\theta$. Avec un AE, la carte de features finale est réduite par `AdaptiveAvgPool2d(1)` (un scalaire par canal), aplatie, puis projetée linéairement vers le vecteur latent $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$, ensuite décodé via `LinearAutoencoder` ou `ConvolutionalAutoencoder`.

V.1.3 Modes d'intégration de la BEM (0, 1, 2, 2+)

Quatre modes de gestion de l'information BEM sont implémentés, définissant la construction de l'entrée $\mathbf{x}$ et de la sortie $\mathbf{y}$:

- **Mode 0 (Absolu Pur)** : L'entrée ne contient que les scalaires, $\mathbf{x} = [\gamma, \text{TSR}]$. La cible est la grandeur absolue SVEN $\mathbf{y} = \mathbf{Y}^{\text{SVEN}}$.
- **Mode 1 (Résiduel BEM)** : L'entrée concatène le champ BEM aplati (ou en 2D), $\mathbf{x} = [\gamma, \text{TSR}, \mathbf{B}^{\text{BEM}}]$. La cible est le résidu physique $\mathbf{y} = \mathbf{Y}^{\text{SVEN}} - \mathbf{B}^{\text{BEM}}$. La reconstruction s'écrit $\hat{\mathbf{Y}}_{\text{abs}} = \mathcal{S}^{-1}(\hat{\mathbf{y}}_{\text{norm}}) + \mathbf{B}^{\text{BEM}}$.
- **Mode 2 (Absolu BEM)** : L'entrée est identique au mode 1. La cible est la grandeur absolue SVEN $\mathbf{y} = \mathbf{Y}^{\text{SVEN}}$. Le réseau apprend directement la carte absolue en étant guidé par la géométrie BEM en entrée.
- **Mode 2+ (Projection Latente BEM)** : *Uniquement défini pour la stratégie GV, en présence d'Auto-Encodeur.* L'AE est entraîné exclusivement sur les grandeurs SVEN (résiduelle 2) ; son espace latent représente donc la variété des solutions physiques réelles. Le BEM est d'abord exprimé dans le même espace de normalisation que les cibles SVEN via le scaler SVEN ($\mathbf{B}_{\text{norm}}^{\text{BEM}}$, calculé par `format_bem_as_Y`), puis projeté dans cet espace latent :

$$\mathbf{z}_{\text{BEM}} = \text{AE}_{\text{SVEN}}.\text{encode}(\mathbf{B}_{\text{norm}}^{\text{BEM}}) \in \mathbb{R}^d \quad (72)$$

L'entrée du réseau prédictif est la concaténation des scalaires et de cette projection latente :

$$\mathbf{x} = [\gamma, \text{TSR}, \mathbf{z}_{\text{BEM}}] \in \mathbb{R}^{n_{\text{scalaires}} + d} \quad (73)$$

Le réseau prédit directement $\hat{\mathbf{z}}_{\text{SVEN}} \in \mathbb{R}^d$, c'est-à-dire la coordonnée latente de la grandeur SVEN dans l'espace appris sur SVEN. La reconstruction s'effectue par décodage simple :

$$\hat{\mathbf{y}}_{\text{norm}} = \text{AE}_{\text{SVEN}}.\text{decode}(\hat{\mathbf{z}}_{\text{SVEN}}) \quad (74)$$

La cible d'entraînement est $\mathbf{y} = \mathbf{Y}_{\text{norm}}^{\text{SVEN}}$, identique au mode 2. Ce mode n'est pas applicable à la stratégie GM : projeter un espace latent vectoriel sur une grille spatiale ne semble pas pertinent.

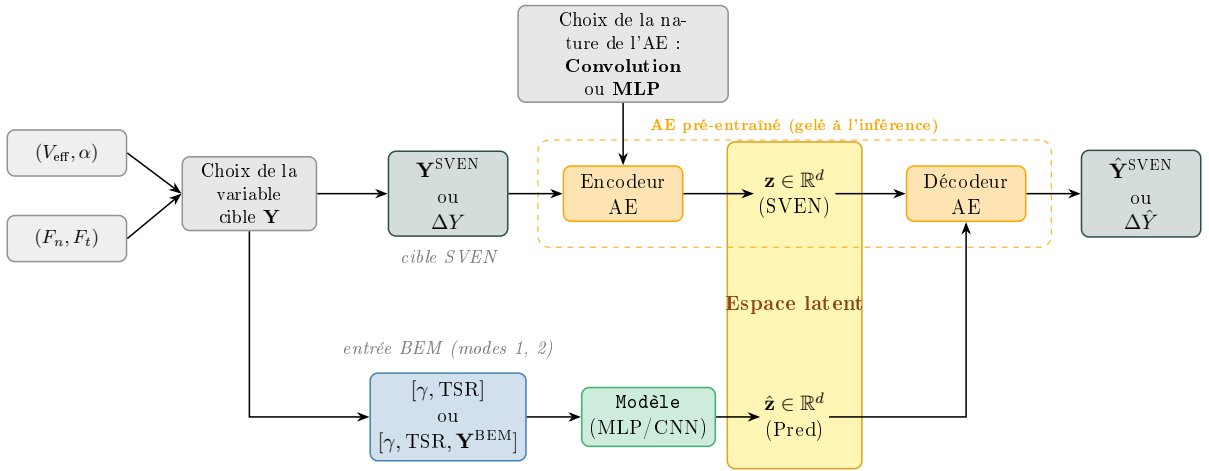


FIGURE 30 – Architecture générique des modes 0, 1 et 2 avec Auto-Encodeurs.

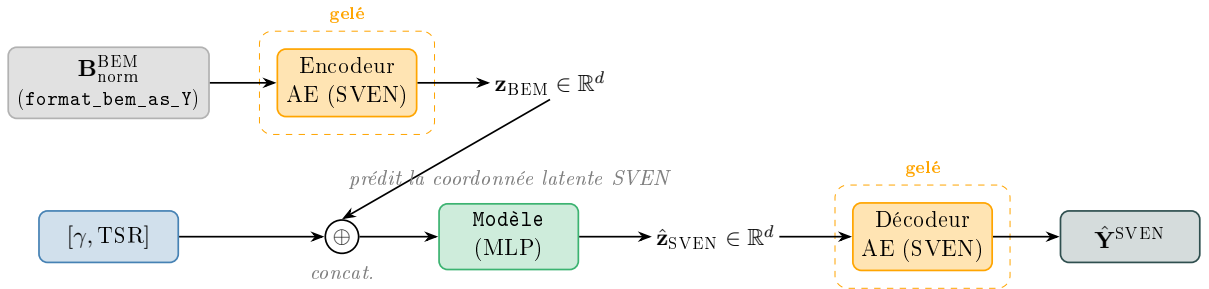


FIGURE 31 – Architecture du mode 2+ (projection latente BEM ; uniquement GV, avec AE).

V.2 Architectures des réseaux

V.2.1 Réseaux prédictifs : TurbineMLP et TurbineCNN

Le perceptron multicouche (TurbineMLP). Dédié à la famille **GV**, il applique une succession de L blocs régularisés par dropout suivis d'une couche de projection linéaire

finale :

$$\mathbf{h}^{(k)} = \text{Dropout}(\text{ReLU}(\mathbf{W}^{(k)}\mathbf{h}^{(k-1)} + \mathbf{b}^{(k)})), \quad k = 1, \dots, L \quad (75)$$

La couche de sortie est :

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{W}^{(L+1)}\mathbf{h}^{(L)} + \mathbf{b}^{(L+1)} \in \mathbb{R}^{d_{\text{out}}} \quad (76)$$

avec $d_{\text{out}} = d_{\text{latent}}$ si un auto-encodeur est utilisé, ou $d_{\text{out}} = 2N_r N_\theta$ sinon.

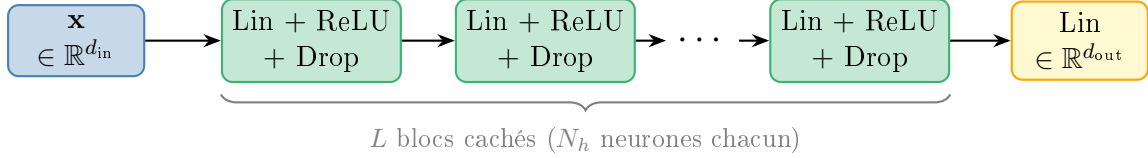


FIGURE 32 – Architecture du TurbineMLP.

Le réseau convolutif périodique (TurbineCNN). Dédié à la famille **GM**, son architecture est constituée de L blocs convolutifs empilés préservant la résolution spatiale $(N_r, N_\theta) = (36, 72)$.

Blocs convolutifs. Chaque bloc applique :

$$\mathbf{h}^{(k)} = \text{Dropout2d}(\text{ReLU}(\text{BN}(\text{Conv}_{3 \times 3}(\text{PeriodicPad}(\mathbf{h}^{(k-1)}))))) \quad (77)$$

avec $C_k = C_{\text{base}} \cdot 2^{k-1}$ filtres au bloc k .

Tête de sortie adaptative.

- **Sans AE (D0) :** Convolution finale 3×3 avec padding périodique, produisant une carte $2 \times N_r \times N_\theta$.
- **Avec AE :** Pour éviter une explosion du nombre de paramètres lors de l'aplatissement de la grille complète ($C \times 36 \times 72$), un `AdaptiveAvgPool2d(1)` réduit chaque carte de features à un scalaire par canal, produisant un vecteur $\mathbb{R}^C$. Une projection linéaire finale mappe ce vecteur vers l'espace latent $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{d_{\text{latent}}}$:

$$\mathbf{z} = \mathbf{W} \text{Flatten}(\text{AvgPool}(\mathbf{h}^{(L)})) + \mathbf{b}, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{d_{\text{latent}}} \quad (78)$$

V.2.2 Banque d'auto-encodeurs pré-entraînés

Les auto-encodeurs compressent l'espace cible haute dimension vers un espace latent $\mathbb{R}^d$. Lors de l'entraînement du réseau prédictif, le décodeur est chargé et ses paramètres

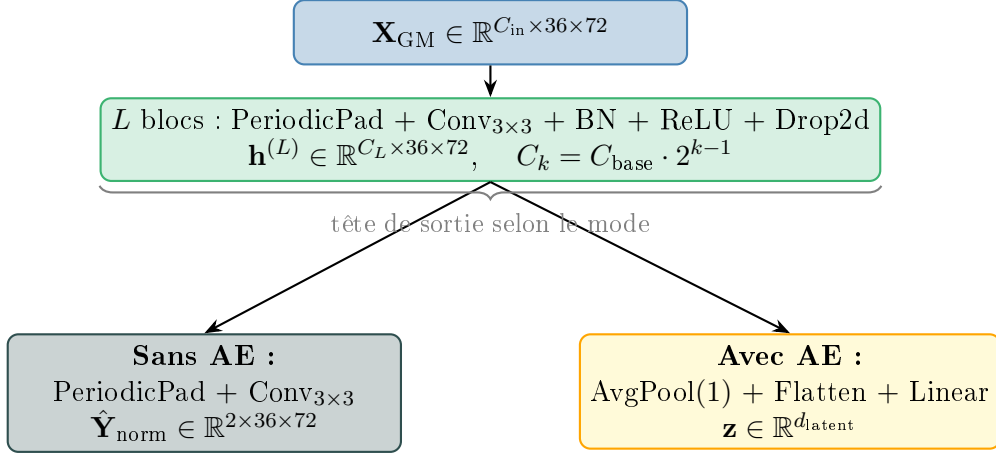


FIGURE 33 – Architecture du TurbineCNN.

sont gelés. La banque est constituée d’une grille exhaustive de configurations, indexées par la clé :

— `<residuelle>_<inter>[_<BEM>]_D<nature><dim>`.

Le suffixe de variante BEM n’apparaît que pour la résiduelle 1 (dont la cible $\mathbf{Y}^{\text{SVEN}} - \mathbf{B}^{\text{BEM}}$ dépend de la variante).

Grille de configurations. Chaque AE est caractérisé par les hyperparamètres structuraux suivants :

- **Résiduelle** : canoniquement $\in \{0, 1\}$. Les résiduelles 2 et 2+ *réutilisent* l’AE de la résiduelle 0 (elles partagent le même espace cible SVEN absolu)..
- **Intermédiaire** $\in \{f, v\}$: la nature physique des sorties compressées.
- **Variante BEM** : uniquement pour la résiduelle 1 (la cible dépend alors de la variante).
- **Nature** (`ae_nature`) $\in \{V, M\}$: architecture linéaire (`LinearAutoencoder`) ou convolutive (`ConvolutionalAutoencoder`).
- **Dimension latente** (`ae_dim`) $\in \{16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$.

Pour une variante BEM donnée, la banque couvre ainsi $2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$ configurations pré-entraînées (résiduelles $\{0, 1\}$, intermédiaires $\{f, v\}$, natures $\{V, M\}$, 7 dimensions latentes). La profondeur de l’AE (`ae_depth`) et, pour les AE convolutifs, le nombre de filtres de base (`ae_base_filters`) ne font pas partie de cette grille : ils sont eux-mêmes optimisés par Optuna lors du pré-entraînement de chaque AE (§V.4.4).

Espace d’entraînement canonique. Quel que soit le format d’entrée du modèle prédictif (GV ou GM), tous les AE sont entraînés sur le format canonique GM de la cible : $(N, 2, N_r, N_\theta)$ pour les AE convolutifs, et $(N, 2N_r N_\theta)$ après aplatissage pour les AE linéaires.

LinearAutoencoder (type V). Les tailles des couches cachées forment une suite géométriquement décroissante de `in_features` = $2N_r N_\theta = 5184$ vers `latent_dim` = d , de longueur pilotée par le nombre de couches $L = \text{ae_depth}$. La dimension de la ℓ -ème couche cachée s'écrit :

$$h_\ell = q^\ell \cdot 5184, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad \text{avec} \quad q = \left(\frac{d}{5184} \right)^{\frac{1}{L+1}} \quad (79)$$

de sorte que $h_0 = 5184$ (entrée) et $h_{L+1} = d$ (espace latent) encadrent la suite. L'encodeur enchaîne alors L blocs (Lin + ReLU) suivis d'une projection linéaire finale vers $\mathbb{R}^d$:

$$\mathbb{R}^{5184} \xrightarrow{\text{Lin+ReLU}} \mathbb{R}^{h_1} \xrightarrow{\text{Lin+ReLU}} \dots \xrightarrow{\text{Lin+ReLU}} \mathbb{R}^{h_L} \xrightarrow{\text{Lin}} \mathbb{R}^d \quad (80)$$

Le décodeur est strictement symétrique (dimensions cachées en ordre inverse $h_L, \dots, h_1$, puis projection finale vers $\mathbb{R}^{5184}$). Seuls `in_features`, `latent_dim` et `n_layers` sont paramétrables ; les dimensions cachées en découlent automatiquement.

Exemple : pour $d = 128$ et $L = 2$, on obtient $(h_1, h_2) = (1510, 440)$; pour $L = 3$, $(h_1, h_2, h_3) = (2055, 815, 323)$.

ConvolutionalAutoencoder (type M). L'encodeur réduit la résolution spatiale par convolutions à *stride* $s = 2$ avec padding périodique. Les hyperparamètres `ae_depth` $\in \{2, 3, 4\}$ et `ae_base_filters` $\in \{8, 16, 32\}$ sont eux-mêmes optimisés par Optuna. La projection latente est effectuée par `Flatten` suivi d'une couche linéaire. Le décodeur effectue l'opération symétrique via des convolutions transposées (`nn.ConvTranspose2d`, noyau 4×4 , *stride* 2, *padding* 1) suivies de `BatchNorm` et `ReLU` ; une interpolation bilinéaire finale restaure exactement la grille ($2 \times N_r \times N_\theta$) si l'arrondi des *strides* l'exige.

Fonction de perte d'entraînement des AE. Pour les AE entraînés sur les forces (`inter=f`), une loss physique renormalisée (`AEPhysicalLoss`) est utilisée à la place de la MSE brute. Elle reconstruit les forces absolues par dénormalisation et multiplication par la pression dynamique D , puis divise l'erreur de reconstruction par l'écart-type global de la force correspondante (estimé sur l'ensemble d'entraînement, séparément pour F_n et F_t) :

$$\mathcal{L}_{\text{AE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_i - F_i}{\sigma_F} \right)^2, \quad \sigma_F \in \{\sigma_{F_n}, \sigma_{F_t}\} \quad (81)$$

où σ_{F_n} (resp. σ_{F_t}) est l'écart-type des forces normales (resp. tangentielles) SVEN sur l'ensemble d'entraînement. Pour les AE sur les vitesses (`inter=v`), une MSE standard `nn.MSELoss` est appliquée dans l'espace normalisé des coordonnées (a_n, a_t) .

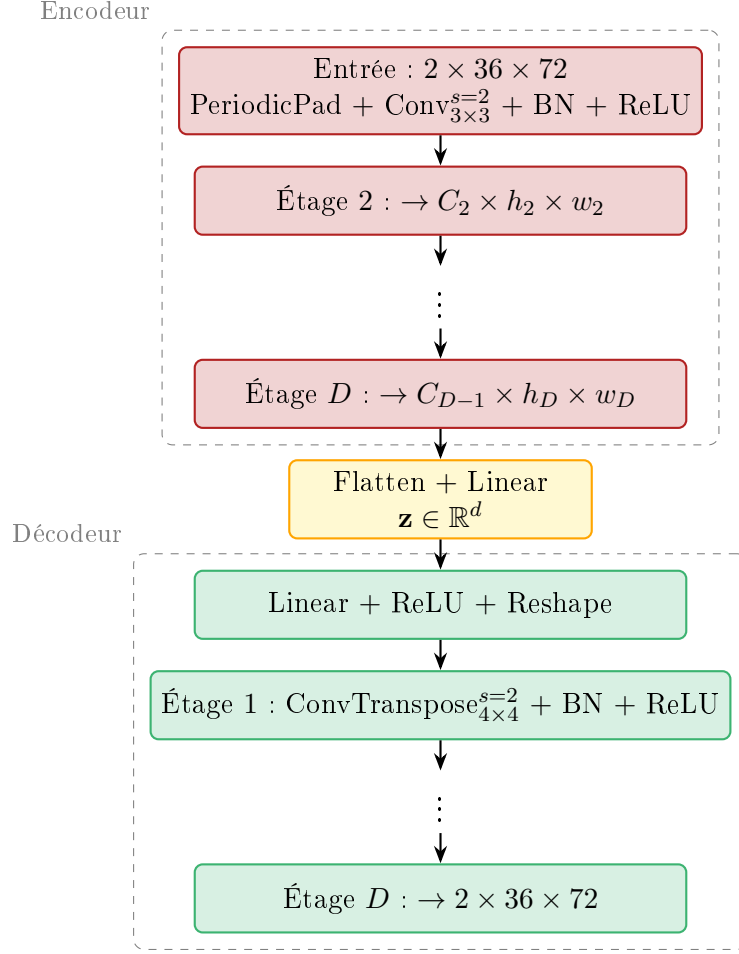


FIGURE 34 – **ConvolutionalAutoencoder** (type M). La profondeur D et le nombre de filtres de base C_{base} sont des hyperparamètres optimisés par Optuna.

V.2.3 Sélection conjointe de l'auto-encodeur et du réseau prédictif

Lorsqu'un modèle prédictif utilise un AE (`has_ae=True`), le choix de l'AE n'est *pas* fixé a priori : la **nature** (`ae_nature` $\in \{V, M\}$) et la **dimension latente** (`ae_dim` $\in \{16, \dots, 1024\}$) sont des hyperparamètres inclus dans la recherche Optuna du modèle prédictif. Ainsi, Optuna sélectionne conjointement l'architecture du réseau prédictif et le meilleur AE de la banque, le tout guidé par la métrique physique de cross-validation.

V.3 Chaîne physique différentiable et fonction de perte

V.3.1 Chaîne physique aval : conversion $\mathcal{C}_{v \rightarrow f}$ et intégration de $\mathcal{C}_P$, $\mathcal{C}_T$

Conversion vitesse $\rightarrow$ force $\mathcal{C}_{v \rightarrow f}$. Pour les stratégies `_v`, les forces sont déduites des coordonnées cartésiennes (a_n, a_t) via `PolarSurrogate`, qui interpole C_l et C_d sur la polaire par une spline d'Akima (interpolation cubique par morceaux, dérivable de classe $\mathcal{C}^1$). Ce choix est motivé par la différentiabilité : contrairement à une interpolation linéaire, dont la dérivée est constante par morceaux (donc discontinue aux nœuds), la spline d'Akima

fournit une dérivée continue, ce qui pourrait être bénéfique pour la rétro-propagation à travers la conversion $\mathcal{C}_{v \rightarrow f}$. On commence par reconstruire les grandeurs polaires à partir des équations (67)–(68) :

$$V_{\text{eff}} = V_{\text{app}} \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \quad \alpha = \arctan\left(\frac{a_n}{a_t}\right) \quad (82)$$

puis on calcule les efforts :

$$\hat{C}_n = C_l(\hat{\alpha}, r) \cos \hat{\alpha} + C_d(\hat{\alpha}, r) \sin \hat{\alpha} \quad (83)$$

$$\hat{C}_t = C_l(\hat{\alpha}, r) \sin \hat{\alpha} - C_d(\hat{\alpha}, r) \cos \hat{\alpha} \quad (84)$$

$$q = \frac{1}{2} \rho \hat{V}_{\text{eff}}^2 |c(r)| \quad (85)$$

$$\hat{F}_n = q \hat{C}_n, \quad \hat{F}_t = -q \hat{C}_t \quad (86)$$

Intégration des coefficients globaux C_P et C_T . Les coefficients de puissance C_P et de poussée C_T sont obtenus par intégration des efforts linéiques (F_n, F_t) le long de la pale, puis par moyenne sur un tour (azimut θ). La même formulation est utilisée par la version NumPy (`compute_cp`) et par la version PyTorch différentiable (`compute_cp_ct_torch`) intervenant dans le terme de perte $\mathcal{L}_1$.

Longueurs de sections radiales. La pale est discrétisée en N_r sections. À partir du rayon de moyeu $r_{\text{hub}} = 0,21$ m, les frontières inter-sections (*nodes*) sont reconstruites récursivement puis les longueurs dl en sont déduites :

$$\text{node}_0 = r_{\text{hub}}, \quad \text{node}_{i+1} = 2r_i - \text{node}_i, \quad dl_i = \text{node}_{i+1} - \text{node}_i \quad (87)$$

Angle structurel local. En chaque section, l'angle structurel combine le *pitch* global et le vrillage (*twist*) local :

$$\phi(r) = \beta_{\text{pitch}} + \beta_{\text{twist}}(r) \quad (88)$$

Projections aérodynamiques. Avec la convention de signe $F_t^{\text{corr}} = -F_t$, on projette les efforts sur les directions du plan de rotation (couple) et de l'axe (poussée) :

$$dQ_r = F_n \sin \phi + F_t^{\text{corr}} \cos \phi = F_n \sin \phi - F_t \cos \phi \quad (\text{densité de couple}) \quad (89)$$

$$dT_r = F_n \cos \phi - F_t^{\text{corr}} \sin \phi = F_n \cos \phi + F_t \sin \phi \quad (\text{densité de poussée}) \quad (90)$$

Intégration radiale (par azimuth). Pour chaque azimuth θ , on somme sur les sections radiales. Le couple élémentaire est pondéré par le bras de levier r :

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{N_r} dQ_{r,i} r_i dl_i \quad (91)$$

$$T(\theta) = \sum_{i=1}^{N_r} dT_{r,i} dl_i \quad (92)$$

Moyenne azimutale et normalisation. On moyenne sur les N_θ azimuths (équivalent temporel sur un tour) et l'on multiplie par le nombre de pales $N_b = 3$. En notant $u_\infty = \Omega R / \text{TSR}$ la vitesse de vent amont et $A = \pi R^2$ la surface balayée, les grandeurs de référence sont la puissance $P_{\text{vent}} = \frac{1}{2} \rho u_\infty^3 A$ et la force $F_{\text{vent}} = \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 A$. Les coefficients globaux s'écrivent alors :

$$C_P = \frac{N_b \Omega \langle Q(\theta) \rangle_\theta}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^3 \pi R^2} \quad (93)$$

$$C_T = \frac{N_b \langle T(\theta) \rangle_\theta}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \pi R^2} \quad (94)$$

où $\langle \cdot \rangle_\theta$ désigne la moyenne sur l'azimut. .

V.3.2 Fonction de perte unifiée (TurbineLoss)

Combinaison convexe des termes de perte. L'apprentissage est gouverné par une fonction de perte composite combinant trois termes. Les coefficients $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ forment une combinaison convexe sur le simplexe :

$$\mathcal{L}_{\text{Total}} = \lambda_1 \mathcal{L}_1 + \lambda_2 \mathcal{L}_2 + \lambda_3 \mathcal{L}_3 \quad \text{avec} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (95)$$

Ces coefficients sont des hyperparamètres optimisés par Optuna, via une paramétrisation garantissant un échantillonnage uniforme sur le simplexe. Pour les stratégies `_v` (trois termes actifs), on tire deux *points de coupure* (v_1, v_2) uniformément dans $[0, 1]$, on les trie $(v_{(1)} \leq v_{(2)})$, puis on prend les longueurs des trois intervalles ainsi découpés :

$$\lambda_1 = v_{(1)}, \quad \lambda_2 = v_{(2)} - v_{(1)}, \quad \lambda_3 = 1 - v_{(2)} \quad (96)$$

Contrairement à la normalisation de trois tirages uniformes (qui concentre les échantillons vers le barycentre du simplexe), cette construction produit une distribution *réellement uniforme* sur le 2-simplexe $\{\lambda_i \geq 0, \sum_i \lambda_i = 1\}$. Pour les stratégies `_f` ($\lambda_3 = 0$ par construction, aucune vitesse intermédiaire), seule une variable scalaire $u_1 \in [0, 1]$ est optimisée :

$$\lambda_1 = u_1, \quad \lambda_2 = 1 - u_1, \quad \lambda_3 = 0 \quad (97)$$

Deux options de formulation des termes locaux $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$ sont proposées, sélectionnées par le paramètre `option` $\in \{A, B\}$:

Terme $\mathcal{L}_1$: erreur intégrée. Contrôle la prédiction des coefficients de puissance et de poussée (C_P, C_T), calculés par intégration le long de la pale selon les équations (93)–(94). L’erreur est toujours relative locale (indépendamment de l’option A ou B) :

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{C}_{P,i} - C_{P,i}}{|C_{P,i}|} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{C}_{T,i} - C_{T,i}}{|C_{T,i}|} \right)^2 \quad (98)$$

Terme $\mathcal{L}_2$: erreur locale sur les forces. Évalue la précision des efforts aérodynamiques F_n, F_t . Pour les stratégies `_v`, les forces sont obtenues via $\mathcal{C}_{v \rightarrow f}$.

- **Option A (Erreur Relative Locale)** : Normalisation par la vérité terrain *locale* point par point. Pour éviter l’explosion du gradient lorsque $F_t \approx 0$, on applique un clamp à $\varepsilon_t = 1,0$ N/m sur la valeur absolue de la référence :

$$\mathcal{L}_2^A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{n,i} - F_{n,i}}{|F_{n,i}|} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{t,i} - F_{t,i}}{\max(|F_{t,i}|, 1.0)} \right)^2 \quad (99)$$

- **Option B (Normalisation Physique Globale)** : Erreur quadratique moyenne dans l’espace normalisé par la pression dynamique $D_i = \frac{1}{2} \rho V_{\text{app},i}^2 |c(r_i)|$:

$$\mathcal{L}_2^B = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{n,i}}{D_i} - \frac{F_{n,i}}{D_i} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{t,i}}{D_i} - \frac{F_{t,i}}{D_i} \right)^2 \quad (100)$$

Terme $\mathcal{L}_3$: erreur locale sur les vitesses. Uniquement actif pour les stratégies `_v` ($\lambda_3 = 0$ imposé pour les stratégies `_f`). Évalue les coordonnées cartésiennes adimensionnelles (a_n, a_t) définies en (67)–(68). Ces coordonnées sont reconstruites après l’éventuel décodage de l’auto-encodeur et après la dénormalisation $\mathcal{S}^{-1}$.

- **Option A (Erreur Relative Locale)** :

$$\mathcal{L}_3^A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{a}_{n,i} - a_{n,i}}{|a_{n,i}|} \right)^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{a}_{t,i} - a_{t,i}}{|a_{t,i}|} \right)^2 \quad (101)$$

- **Option B (MSE directe)** : Erreur quadratique directe sur les coordonnées (a_n, a_t) reconstruites (après décodage et dénormalisation, déjà adimensionnées par V_{app}), sans pondération locale. Elle est implémentée par un unique `nn.functional.mse_loss` sur les deux canaux empilés :

$$\mathcal{L}_3^B = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N [(\hat{a}_{n,i} - a_{n,i})^2 + (\hat{a}_{t,i} - a_{t,i})^2] \quad (102)$$

(le facteur $\frac{1}{2}$ provient de la moyenne sur les $2N$ éléments et est sans effet, cf. remarque sur $\mathcal{L}_2^B$).

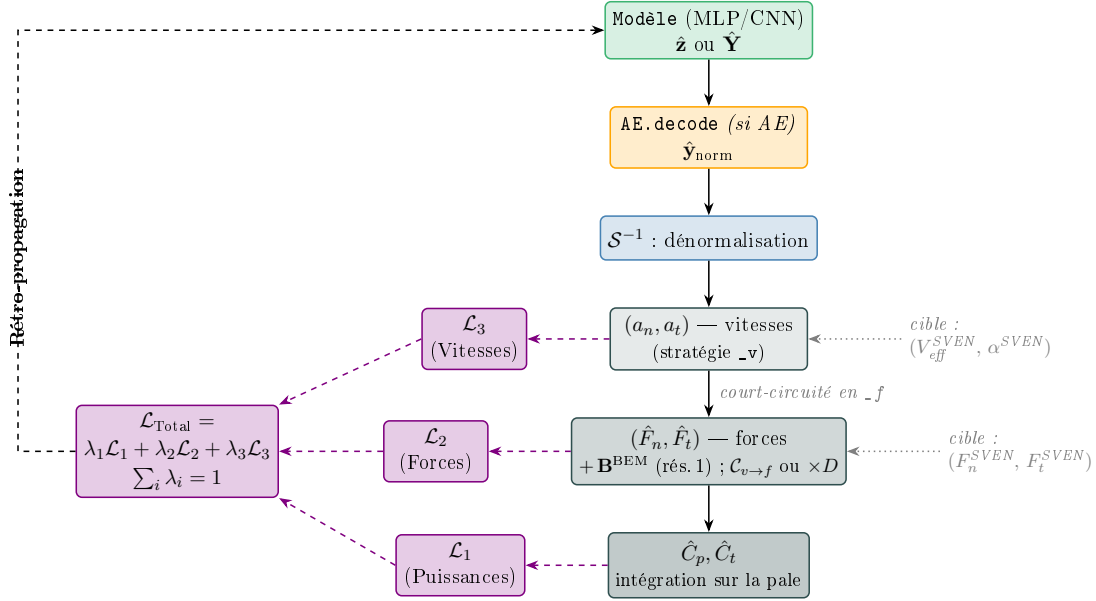


FIGURE 35 – Architecture de la TurbineLoss unifiée.

V.4 Nomenclature et protocole d'apprentissage

V.4.1 Convention de nommage des modèles

Chaque modèle prédictif est identifié par une clé structurée concaténant l'ensemble de ses axes de configuration :

`<entrée>_<résiduelle>_<inter>[_<BEM>]_<AE>_<option>_P<pct>`

- `<entrée>` $\in \{GV, GM\}$: topologie d'entrée/sortie (vecteur global aplati ou carte 2D).
- `<résiduelle>` $\in \{0, 1, 2, 2+\}$: mode d'intégration de la BEM.
- `<inter>` $\in \{f, v\}$: nature des variables intermédiaires (forces ou vitesses).
- `[_<BEM>]` $\in \{DUM, IFP, P\&P\}$: variante de calcul de la BEM (voir §V.4.2). Ce jeton n'est présent que lorsque la BEM intervient effectivement en entrée, c'est-à-dire pour les résiduelles 1 et 2 (dont 2+); il est absent pour la résiduelle 0.
- `<AE>` : D0 si aucun auto-encodeur n'est utilisé, ou DXY si un AE est utilisé. Le libellé générique DXY traduit le fait que la **nature** et la **dimension latente** de l'AE ne sont pas fixées *a priori* mais sélectionnées par Optuna (§V.2.3).
- `<option>` $\in \{A, B\}$: variante de formulation des termes de perte locaux $\mathcal{L}_2$ et $\mathcal{L}_3$.
- `P<pct>` : proportion (en %) des couples (γ, TSR) d'entraînement effectivement utilisés (voir §V.4.3).

Exemples : `GV_1_f_IFP_D0_B_P50` (résiduel BEM, forces, variante IFP, sans AE, option B, 50 % des données) ; `GV_1_v_IFP_DXY_A_P50` (avec AE sélectionné par Optuna).

V.4.2 Variantes de calcul de la BEM

La théorie BEM classique admet plusieurs modèles de correction (notamment de correction de sillage/inflow). Trois variantes sont disponibles et donnent lieu à des champs $(F_n^{\text{BEM}}, F_t^{\text{BEM}})$ – ou $(V_{\text{eff}}^{\text{BEM}}, \alpha^{\text{BEM}})$ – distincts :

- **DUM** (*Dummy*) : variante de référence triviale,
- **IFP** (*IFPEN*) : variante de correction de l'IFPEN,
- **P&P** (*Pitt & Peters*) : correction d'*inflow* dynamique de Pitt & Peters.

La variante n'intervient que pour les résiduelles utilisant la BEM en entrée (1 et 2). Pour la résiduelle 1, la cible elle-même dépend de la variante ($\mathbf{y} = \mathbf{Y}^{\text{SVEN}} - \mathbf{B}^{\text{BEM}}$) : les scalars, les auto-encodeurs de résiduelle 1 et les baselines sont donc spécifiques à chaque variante.

V.4.3 Protocole sur la proportion de données (suffixe PX)

Afin de quantifier l'impact du volume de données d'entraînement sur les performances, un protocole balaie une liste de proportions. Pour chaque proportion `pct`, le sous-ensemble d'entraînement est ré-échantillonné par `subsample_train` : on conserve $n = \max(1, \lfloor N_\gamma \cdot \text{pct}/100 \rfloor)$ couples (γ, TSR) tirés sans remise (le tirage porte sur les γ uniques, chaque γ correspondant à un unique TSR en plan d'expériences LHS). Chaque configuration de modèle est alors optimisée puis évaluée indépendamment pour chaque proportion, ce qui permet de tracer les courbes de performance en fonction de `pct`. À noter : les auto-encodeurs de la banque sont toujours pré-entraînés sur 100 % des données d'entraînement ; seul l'entraînement des modèles prédictifs (GV/GM) est sous-échantillonné.

V.4.4 Plages de recherche des hyperparamètres et paramètres fixes

La quasi-totalité des hyperparamètres est désormais laissée à la recherche Optuna, y compris ceux relatifs à l'auto-encodeur. Les tirages continus marqués *log* sont échantillonnés sur une échelle logarithmique.

Les poids de perte $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ ne sont pas tirés directement mais dérivés de (v_1, v_2) ou de u_1 (voir Fig. 35 et la formulation du simplexe). La **nature** et la **dimension** de l'AE sont sélectionnées ici même : Optuna choisit donc conjointement l'architecture prédictive et l'AE de la banque.

Pour chaque couple $(\text{ae_nature}, \text{ae_dim})$ de la banque, une recherche Optuna dédiée optimise :

Hyperparamètre	Domaine de recherche	Condition
lr (sans AE)	$[10^{-5}, 3 \cdot 10^{-3}]$, <i>log</i>	has_ae = False
lr (avec AE)	$[5 \cdot 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-2}]$, <i>log</i>	has_ae = True
dropout_rate	$[10^{-4}, 5 \cdot 10^{-1}]$, <i>log</i>	toutes
n_layers (GV)	$\{1, 2, 3, 4\}$ (entier)	entrée = GV
n_neurons (GV)	$\{128, 192, 256, \dots, 768\}$ (pas 64)	entrée = GV
n_layers (GM)	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$ (entier)	entrée = GM
base_filters (GM)	$\{16, 32, 64, 128\}$	entrée = GM
ae_nature	$\{V, M\}$	has_ae = True
ae_dim	$\{16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$	has_ae = True
v_1, v_2 (simplexe)	$[0, 1]$ chacun	inter = v
u_1 (simplexe)	$[0, 1]$	inter = f

TABLE 5 – Plages de recherche Optuna pour le modèle prédictif (TurbineMLP / TurbineCNN).

Hyperparamètre	Domaine de recherche	Condition
ae_lr	$[10^{-4}, 5 \cdot 10^{-3}]$, <i>log</i>	tous
ae_depth	$\{2, 3, 4\}$ (entier)	tous
ae_base_filters	$\{8, 16, 32\}$	AE convolutif (M)

TABLE 6 – Plages de recherche Optuna pour le pré-entraînement des auto-encodeurs de la banque.

Paramètres fixes du protocole. Les grandeurs suivantes ne sont pas optimisées mais fixées par la configuration : nombre d’époques = 500 (Optuna, entraînement final, et AE) ; validation croisée à 5 *folds* ; nombre d’essais Optuna = 150 (GV), 50 (GM), 15 (AE) ; *warm-up* du MedianPruner des modèles prédictifs = `n_warmup_steps` = 150 époques intra-essai (le pruning est désactivé tant qu’un essai n’a pas dépassé 150 époques) ; *warm-up* du MedianPruner des AE = 10 époques ; graine aléatoire = 42) ; seuil de sauvegarde $\tau = 2,5$ (§V.5.3).

V.5 Métriques d’évaluation

V.5.1 Les dix sous-métriques

La performance est quantifiée sur l’ensemble de test via dix sous-métriques ($m_a \dots m_j$). Soit N le nombre total de points sur la grille (pour un cas de vent donné), et N_y le nombre de conditions de vent (yaw/TSR) distinctes. Les notations $\hat{F}$ et F^{SVEN} désignent respectivement la prédiction et la vérité terrain.

Métriques locales (efforts linéiques).

RMSE Absolus (m_a, m_b) :

$$m_a = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\hat{F}_{n,i} - F_{n,i}^{\text{SVEN}} \right)^2} \quad (\text{N/m}) \quad (103)$$

$$m_b = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\hat{F}_{t,i} - F_{t,i}^{\text{SVEN}} \right)^2} \quad (\text{N/m}) \quad (104)$$

RMSE Relatifs Locaux (m_c, m_d) : Ces métriques constituent la mesure principale retenue par l'ingénieur, car elles pénalisent les erreurs de manière homogène, point par point, indépendamment de la magnitude absolue des efforts. Pour F_n , le dénominateur est la vérité terrain locale. Pour F_t , un mécanisme de clamp sécurise le dénominateur en remplaçant les valeurs proches de zéro par 1,0 N/m :

$$m_c = 100 \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{n,i} - F_{n,i}^{\text{SVEN}}}{|F_{n,i}^{\text{SVEN}}|} \right)^2} \quad (\%) \quad (105)$$

$$m_d = 100 \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{t,i} - F_{t,i}^{\text{SVEN}}}{\max(|F_{t,i}^{\text{SVEN}}|, 1.0)} \right)^2} \quad (\%) \quad (106)$$

RMSE Normalisés par Pression Dynamique (m_e, m_f) : Erreur sur les coefficients de force adimensionnés par $D_i = \frac{1}{2} \rho V_{\text{app},i}^2 |c(r_i)|$:

$$m_e = 100 \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{n,i}}{D_i} - \frac{F_{n,i}^{\text{SVEN}}}{D_i} \right)^2} \quad (\%) \quad (107)$$

$$m_f = 100 \times \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\hat{F}_{t,i}}{D_i} - \frac{F_{t,i}^{\text{SVEN}}}{D_i} \right)^2} \quad (\%) \quad (108)$$

Métriques globales (coefficients intégrés).

RMSE Absolus (m_g, m_h) :

$$m_g = \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} \left(\hat{C}_{p,j} - C_{p,j}^{\text{SVEN}} \right)^2} \quad (109)$$

$$m_h = \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} \left(\hat{C}_{t,j} - C_{t,j}^{\text{SVEN}} \right)^2} \quad (110)$$

RMSE Relatifs Intégrés (m_i, m_j) :

$$m_i = 100 \times \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} \left(\frac{\hat{C}_{p,j} - C_{p,j}^{\text{SVEN}}}{|C_{p,j}^{\text{SVEN}}|} \right)^2} \quad (\%) \quad (111)$$

$$m_j = 100 \times \sqrt{\frac{1}{N_y} \sum_{j=1}^{N_y} \left(\frac{\hat{C}_{t,j} - C_{t,j}^{\text{SVEN}}}{|C_{t,j}^{\text{SVEN}}|} \right)^2} \quad (\%) \quad (112)$$

V.5.2 Statistiques de dispersion : écart-type et maximum de l'erreur

Les sous-métriques $m_a \dots m_j$ sont des moyennes (RMS) qui résument l'erreur globale mais masquent son homogénéité. Pour la caractériser, l'évaluation reporte, en complément, l'écart-type et le maximum des erreurs ponctuelles $|\hat{\cdot} - \cdot^{\text{SVEN}}|$. Ces statistiques sont calculées sur les mêmes familles d'erreur que les métriques RMS correspondantes :

Erreurs ponctuelles locales (une valeur par nœud (r, θ, γ , TSR)).

$$e_n^{\text{abs}} = \left| \hat{F}_n - F_n^{\text{SVEN}} \right|, \quad e_t^{\text{abs}} = \left| \hat{F}_t - F_t^{\text{SVEN}} \right| \quad (\text{N/m}) \quad (113)$$

$$e_n^{\text{rel}} = 100 \frac{\left| \hat{F}_n - F_n^{\text{SVEN}} \right|}{|F_n^{\text{SVEN}}|}, \quad e_t^{\text{rel}} = 100 \frac{\left| \hat{F}_t - F_t^{\text{SVEN}} \right|}{\max(|F_t^{\text{SVEN}}|, 1.0)} \quad (\%) \quad (114)$$

$$e_n^D = 100 \left| \frac{\hat{F}_n}{D} - \frac{F_n^{\text{SVEN}}}{D} \right|, \quad e_t^D = 100 \left| \frac{\hat{F}_t}{D} - \frac{F_t^{\text{SVEN}}}{D} \right| \quad (\%) \quad (115)$$

Erreurs ponctuelles globales (une valeur par condition de vent (γ , TSR)).

$$e_{C_p}^{\text{abs}} = \left| \hat{C}_p - C_p^{\text{SVEN}} \right|, \quad e_{C_t}^{\text{abs}} = \left| \hat{C}_t - C_t^{\text{SVEN}} \right| \quad (116)$$

$$e_{C_p}^{\text{rel}} = 100 \frac{\left| \hat{C}_p - C_p^{\text{SVEN}} \right|}{|C_p^{\text{SVEN}}|}, \quad e_{C_t}^{\text{rel}} = 100 \frac{\left| \hat{C}_t - C_t^{\text{SVEN}} \right|}{|C_t^{\text{SVEN}}|} \quad (\%) \quad (117)$$

Statistiques reportées. Pour chaque famille e ci-dessus, les récapitulatifs consignent, en plus de la valeur RMS déjà décrite :

$$\text{Std} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (e_i - \bar{e})^2}, \quad \text{Max} = \max_i e_i \quad (118)$$

Le max identifie le point le plus défavorable (garantie de pire cas), tandis que l'écart-type mesure l'homogénéité spatiale de l'erreur. Les scores composites A , B et C reçoivent de même une colonne **Std** et **Max**, calculées sur la concaténation des erreurs relatives de F_n et F_t (scores A , B) ou de C_p et C_t (score C). La *baseline* BEM est examinée avec exactement les mêmes statistiques, permettant une comparaison directe.

V.5.3 Scores composites de sélection et critère de sauvegarde

Trois scores agrégés sont définis :

$$\text{Score A} = m_c + m_d \quad (\text{Erreur Relative Locale}) \quad (119)$$

$$\text{Score B} = m_e + m_f \quad (\text{Erreur Normalisée Physique}) \quad (120)$$

$$\text{Score C} = m_i + m_j \quad (\text{Erreur Intégrée Relative}) \quad (121)$$

L'objectif minimisé par Optuna lors de la sélection d'un modèle est le score correspondant à l'option de perte retenue : Score A si `option = A`, Score B si `option = B`, évalué comme la moyenne sur les cinq *folds* de validation croisée (métrique physique de cross-validation). Le Score C n'entre pas dans l'objectif d'optimisation ; il est calculé à titre informatif.

VI Résultats détaillés des modèles prédictifs

Cette annexe rassemble les résultats complets de l’objectif A. Elle comprend les tableaux récapitulatifs de tous les modèles évalués, organisés par score, ainsi que les cartes polaires d’erreur complémentaires de celles présentées dans le corps du rapport.

VI.1 Tableaux récapitulatifs

Ces tableaux correspondent à la compétition décrite dans la Section 2.1.7. Les modèles y sont triés par score croissant, ce qui permet de voir d’un coup d’œil comment chaque configuration se classe par rapport aux autres et d’identifier les tendances associées à chaque axe de conception. La ligne de référence est la baseline **BEM_IFP**, c’est-à-dire la prédiction BEM brute évaluée avec exactement les mêmes métriques.

Les colonnes reportent :

- **Score A** ou **Score B** : le score composite local minimisé lors de la sélection, défini dans la Section V.5.3. Les modèles d’option A et d’option B ne sont pas directement comparables entre eux, car ils n’optimisent pas la même quantité.
- **Std** et **Max** : l’écart-type et le maximum des erreurs ponctuelles associées au score, tels que définis dans la Section V.5.2. Ils renseignent respectivement sur l’homogénéité spatiale de l’erreur et sur le pire point du disque.
- **Score C** : l’erreur relative sur les coefficients intégrés C_P et C_T , définie dans la Section V.5.3. Ce score n’entre pas dans l’objectif d’optimisation et n’est reporté qu’à titre informatif.
- **Params** : le nombre total de paramètres entraînés du modèle, en millions. Cette colonne permet de rapporter la performance au coût du modèle.

Les scores sont mesurés sur l’ensemble de test, plus la valeur est faible, meilleur est le modèle.

Tous les modèles reportés ici sont entraînés avec la moitié des couples (γ, TSR) disponibles (suffixe **P50**, voir la Section V.4.3), et les scores sont évalués sur l’ensemble de test, c’est-à-dire sur des conditions de vent jamais vues à l’entraînement. Un intervalle de confiance à 95 % a été estimé par bootstrap sur chaque score ; ces intervalles se recouvrent très largement d’un modèle à l’autre et ne permettent pas de départager les configurations. Ils ne sont donc pas reportés, et les écarts commentés dans ce rapport doivent être lus comme des tendances et non comme des différences statistiquement établies.

Modèle	Score A	Std	Max	Score C	Params
	(%)	(%)	(%)	(%)	(10 ⁶)
BEM IFP (référence)	79,18	39,12	1273,22	34,27	—
GV_0_f_D0_A_P50	27,33	17,49	685,97	3,02	1,075
GV_2_f_IFP_D0_A_P50	29,52	18,27	711,40	2,83	7,803
GM_1_f_IFP_D0_A_P50	30,44	18,29	633,17	2,73	1,495
GM_2_f_IFP_DV256_A_P50	30,77	17,42	828,80	3,64	6,469
GV_0_f_DV64_A_P50	31,73	20,21	753,99	3,77	1,040
GV_2+_f_IFP_DV64_A_P50	31,92	20,38	750,71	2,86	0,084
GM_2_v_IFP_D0_A_P50	31,93	18,11	761,38	3,77	6,225
GM_0_f_DV64_A_P50	32,05	18,95	851,68	4,29	1,516
GV_2_f_IFP_DV64_A_P50	33,15	21,30	768,10	3,39	4,193
GM_2_f_IFP_D0_A_P50	33,71	18,96	1174,51	5,34	6,295
GV_1_f_IFP_D0_A_P50	35,10	22,93	808,33	2,25	7,803
GM_0_v_DV16_A_P50	35,24	22,82	744,30	4,86	0,377
GV_1_f_IFP_DV1024_A_P50	35,80	23,59	1215,29	2,92	2,534
GM_2_v_IFP_DV32_A_P50	36,00	23,28	753,57	3,96	6,240
GM_1_f_IFP_DV256_A_P50	36,94	23,75	887,42	2,82	0,132
GV_1_v_IFP_D0_A_P50	37,74	23,34	729,14	3,05	2,071
GV_2+_v_IFP_DV16_A_P50	37,81	24,69	756,75	4,49	1,017
GV_2_v_IFP_DV32_A_P50	38,74	25,17	771,12	3,61	1,002
GV_1_v_IFP_DM1024_A_P50	38,78	24,56	958,31	2,61	1,305
GV_0_v_DV16_A_P50	38,81	25,75	778,06	4,04	0,041
GV_0_v_D0_A_P50	40,52	26,37	754,71	2,37	4,579
GV_2_v_IFP_D0_A_P50	42,42	27,72	771,92	3,72	9,742
GM_1_v_IFP_DV16_A_P50	52,02	31,91	1470,90	7,20	0,006
GM_0_v_D0_A_P50	60,07	32,88	1333,16	11,55	1,580
GM_1_v_IFP_D0_A_P50	62,67	34,63	1459,70	12,58	1,495
GM_0_f_D0_A_P50	70,87	40,42	1138,63	24,41	25,122

TABLE 7 – Performances des modèles testés pour le score A

Modèle	Score B	Std	Max	Score C	Params
	(%)	(%)	(%)	(%)	(10 ⁶)
BEM IFP (référence)	14,10	5,55	35,24	34,27	–
GV_0_f_DV512_B_P50	3,29	1,55	34,49	3,61	0,346
GV_2_f_IFP_DV256_B_P50	3,30	1,55	33,68	3,48	3,468
GV_2+_f_IFP_DV128_B_P50	3,40	1,58	34,88	2,88	0,100
GM_0_f_DV128_B_P50	3,42	1,58	33,98	4,11	25,347
GV_0_f_D0_B_P50	3,43	1,64	34,79	3,43	3,990
GV_2_f_IFP_D0_B_P50	3,48	1,61	35,31	3,78	7,803
GM_1_f_IFP_D0_B_P50	3,49	1,56	41,22	2,94	0,395
GM_2_v_IFP_DV32_B_P50	3,64	1,76	34,63	2,70	6,310
GV_0_v_DV32_B_P50	3,68	1,78	34,46	3,65	0,433
GV_1_v_IFP_D0_B_P50	3,74	1,82	35,03	2,05	7,053
GV_2_v_IFP_D0_B_P50	3,76	1,82	34,49	3,20	9,742
GV_2_v_IFP_DV32_B_P50	3,76	1,81	34,70	2,90	1,002
GM_0_v_DV16_B_P50	3,79	1,80	34,73	4,42	6,221
GV_0_v_D0_B_P50	3,84	1,87	35,44	3,04	5,170
GM_2_f_IFP_DV128_B_P50	3,86	1,77	37,07	3,58	0,423
GM_1_v_IFP_DV16_B_P50	3,88	1,85	36,35	3,23	6,223
GV_1_f_IFP_DV512_B_P50	3,98	1,91	53,38	2,85	4,013
GV_1_v_IFP_DV1024_B_P50	4,02	1,93	35,48	3,26	2,985
GV_1_f_IFP_D0_B_P50	4,03	1,95	56,91	3,00	7,053
GM_2_f_IFP_D0_B_P50	4,06	1,80	36,15	4,59	100,671
GV_2+_v_IFP_DV32_B_P50	4,13	1,95	37,13	3,84	0,453
GM_1_f_IFP_DV512_B_P50	4,15	2,00	60,42	2,22	6,732
GM_1_v_IFP_D0_B_P50	4,33	1,96	33,57	3,78	0,395
GM_2_v_IFP_D0_B_P50	4,45	2,00	34,66	4,31	0,379
GM_0_v_D0_B_P50	6,58	2,80	33,87	8,44	0,377
GM_0_f_D0_B_P50	7,41	2,87	38,70	10,03	6,311

TABLE 8 – Performances des modèles testés pour le score B

VI.2 Cartes polaires complémentaires

Les cartes de cette section complètent celles du corps du rapport. Elles portent sur la force tangentielle F_t , dont l'ordre de grandeur est bien plus faible que celui de la force normale F_n , ce qui rend son erreur relative nettement plus difficile à contrôler. Les deux figures correspondent au même cas de test que dans le corps du rapport, à savoir $\gamma = -7.40^\circ$ et $\text{TSR} = 6.96$.

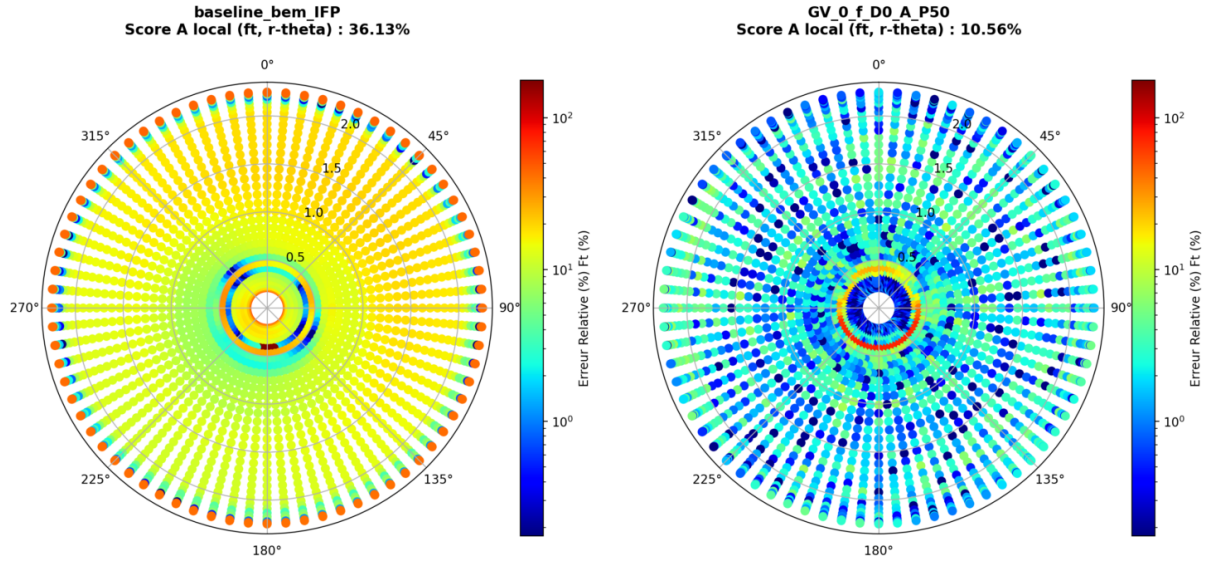


FIGURE 36 – Erreur relative sur la force tangentielle F_t , pour la baseline BEM IFP (à gauche) et le modèle $\text{GV}_0\text{f_D0_A_P50}$ (à droite). Échelle logarithmique commune.

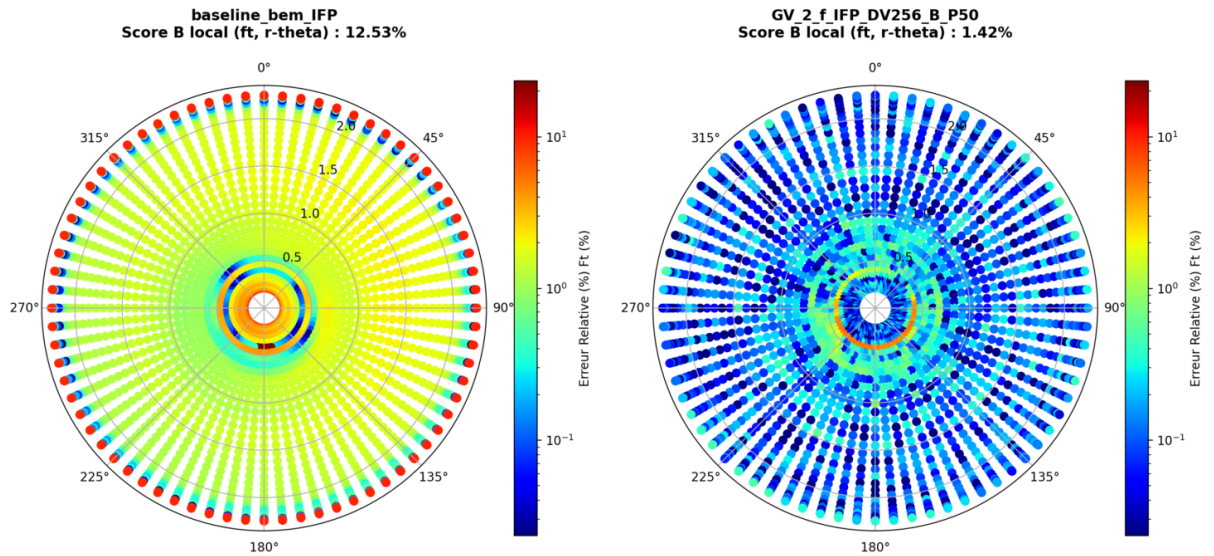


FIGURE 37 – Erreur relative sur la force tangentielle F_t , pour la baseline BEM IFP (à gauche) et le modèle $\text{GV}_2\text{f_IFP_DV256_B_P50}$ (à droite). Échelle logarithmique commune.

VII Guide des dépôts Github

Cette annexe recense les dépôts de code produits ou modifiés pendant le stage et donne la correspondance entre le formalisme mathématique de la Section I.3 et les variables du solveur SVEN.

VII.1 Organisation des dépôts

Le travail est réparti sur deux dépôts distincts, un par objectif :

- **Objectif A – apprentissage profond** : https://github.com/Kaneda93100/BEM_2_Vortex-.

Ce dépôt contient la chaîne de traitement complète de l'objectif A : génération et mise en forme des jeux de données, définition des architectures (MLP, CNN, auto-encodeurs), boucles d'entraînement, sélection des hyperparamètres et scripts de post-traitement (tableaux de performance, cartes polaires) sous forme d'une application streamlit.

- **Objectif B – analyse numérique de la méthode FVW** : <https://github.com/rozen92/SVEN>.

Il s'agit d'une version instrumentée du solveur SVEN fourni par l'IFPEN. Les ajouts propres au stage sont le calcul de la jacobienne analytique de f (Proposition II.1), le solveur de Newton (Section II.3), ainsi que les routines de journalisation des indicateurs de convergence exploités dans les expériences numériques (rayons spectraux, valeurs propres, constantes de Lipschitz empiriques, nombre d'itérations et temps d'exécution du solveur de point fixe).

Ce second dépôt a également servi à produire l'ensemble des simulations haute fidélité qui constituent les données d'entraînement des modèles de l'objectif A. Les deux dépôts sont donc liés : le premier utilise ce que le second produit.

VII.2 Correspondance entre le formalisme mathématique et le code SVEN

Le code source de SVEN repose sur une approche orientée objet où chaque pale est traitée comme une instance distincte. Il est néanmoins possible d'y faire correspondre terme à terme la modélisation par concaténation en vecteurs de taille $3n$ introduite dans la Section I.3. Les grandeurs mathématiques s'y retrouvent de la manière suivante :

- **Discrétisation** : n correspond à `len(blade.centers)`, et m à la variable `nearWakeLength`.
Le pas de temps Δt et le pas angulaire $\Delta\theta$ se retrouvent via la variable `timeStep` et l'évolution de `currentAzimuth`.

- **Géométrie :**

- Les blade nodes b_i correspondent à `blade.bladeNodes`.
- Les edge nodes e_i correspondent à `blade.trailingEdgeNode`.
- Les points de Kutta P_k correspondent à `blade.centers`.
- Les cordes c_k correspondent à `blade.centerChords`.
- Les vecteurs directeurs locaux $\vec{N}_k$ et $\vec{T}_k$ sont encodés via les matrices de rotation `centersOrientationMatrix`.

- **Circulations et sillages :**

- Γ correspond à `blade.gammaBound`.
- Les circulations du sillage Λ correspondent, à une opération près, aux tableaux `blade.shedFilamentsCirculation` et `blade.trailFilamentsCirculation`.
- Les positions du sillage M correspondent à `blade.wakeNodes`.

- **Cinématique et effort :**

- La fonction $f(\Gamma)$ est implémentée dans la méthode `blade.estimateGammaBound()`.
- L'angle d'attaque α_k correspond à `blade.attackAngle`.
- La fonction $C_L(\alpha)$ est évaluée via `airfoil.getLift(aoa)`.
- Le facteur η_{relax} correspond à la variable interne `relax`.
- Le rayon de régularisation de Biot-Savart δ (ou ϵ') correspond au paramètre `deltaFlts`.
- Dans l'algorithme de point fixe, la vitesse effective $\vec{u}(P_k, \Gamma)$ est projetée dans le repère local de l'élément (défini par $\vec{T}_k, \vec{N}_k \times \vec{T}_k, \vec{N}_k$) : sa composante selon l'axe d'envergure $\vec{N}_k \times \vec{T}_k$ est donc annulée, ce qui se traduit dans le code par `uEffectiveInElementRef[:, 1] = 0`.